Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1480: Úvod do matematiky - seminář

Téma 4: Extrémy funkcí dvou proměnných 2/2

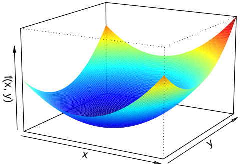
Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

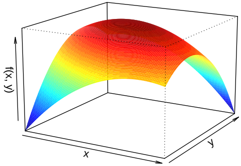
Přehled pojmů

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

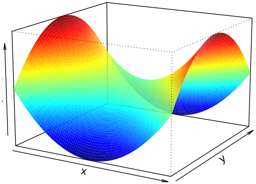
- $f(x, y)$ . . . funkce dvou proměnných x a y
- **lokální extrém** . . . lokální minimum, nebo lokální maximum funkce $f(x, y)$
- **stacionární bod** . . . bod $[x, y]$, ve kterém může (ale nemusí) být lokální extrém funkce $f(x, y)$
- **Hessova matice** H . . . matice druhých parciálních derivací
- **hessián** h . . . determinant Hessovy matice
- typy stacionárních bodů
  - **lokální minimum** $m[x, y]$
    - bod, ve kterém funkce $f(x, y)$ dosahuje lokálního minima jak z hlediska proměnné x, tak z hlediska proměnné y



- **lokální maximum** $M[x, y]$
  - bod, ve kterém funkce $f(x, y)$ dosahuje lokálního maxima jak z hlediska proměnné x, tak z hlediska proměnné y



- **sedlový bod** $S[x, y]$
  - bod, ve kterém funkce $f(x, y)$ dosahuje z hlediska proměnné x lokálního minima a z hlediska osy y lokálního maxima, nebo naopak.



Proces hledání lokálních extrémů

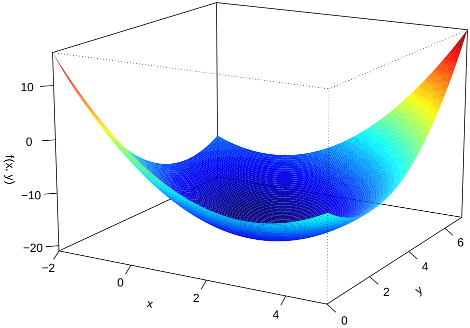
Funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y $\rightarrow$ chceme najít její extrémy

1. nalezneme první parciální derivace a položíme je rovny nule $\rightarrow$ soustava rovnic
   - $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$
   - $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$
2. vyřešením soustavy rovnic získáme jeden nebo více stacionárních bodů $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$, tj. bodů, ve kterých může (ale nemusí) být lokální extrém
3. vypočítáme druhé parciální derivace funkce $f(x, y)$ a vytvoříme Hessovu matici
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix}$$
4. do Hessovy matice dosadíme první stacionární bod $[x_1, y_1]$ $\rightarrow$ číselná matice H
5. vypočítáme determinant h (hessián) matice H
6. v závislosti na hodnotě hessiánu h stanovíme typ stacionárního bodu
   - $h > 0 \rightarrow [x_1, y_1]$ je lokální extrém (minimum nebo maximum)
   - $h = 0 \rightarrow [x_1, y_1]$ nelze rozhodnout
   - $h < 0 \rightarrow [x_1, y_1]$ je sedlový bod $\rightarrow S[x_1, y_1]$
7. pokud $h > 0$ (extrém) $\rightarrow$v závislosti na hodnotě $d = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)_{|x=x_1, y=y_1}$ stanovíme typ lokálního extrému
   - $d > 0 \rightarrow \cup \rightarrow$ konvexní tvar $\rightarrow [x_1, y_1]$ je lokální minimum $\rightarrow m[x_1, y_1]$
   - $d < 0 \rightarrow \cap \rightarrow$ konkávní tvar $\rightarrow [x_1, y_1]$ je lokální maximum $\rightarrow M[x_1, y_1]$
8. opakováním kroků $4 - 7$ zjistíme typy stacionárních bodů $[x_2, y_2]$, ..., $[x_n, y_n]$.

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

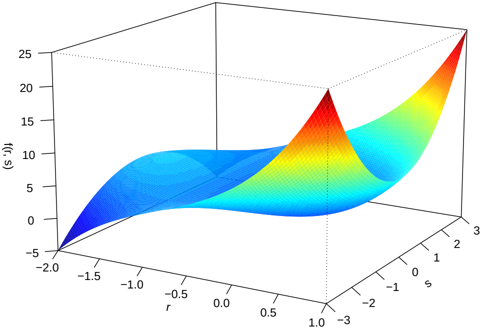
Příklad 4.4. Lokální extrémy funkce dvou proměnných
Najděte stacionární body následujících funkcí a rozhodněte, zda se jedná o extrém. Pokud ano, určete jeho typ.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$



10
0
−10
−20
f(x, y)
−2
0
2
4
x
0
2
4
6
y

2. $f(r, s) = 2r^3 + rs^2 + 5r^2 + s^2$


25
20
15
10
5
0
−5
f(r, s)
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
r
−3
−2
−1
0
1
2
3
s