С1480: Введення до математики – семінар
Тема 0: Повторення основ математики

Теорія

Вероніка Горска
Осінній семестр, 2022

Повторення основ математики – Загальні поняття

Області значень, множини

- $\mathbb{R} = (-\infty\,;\,\infty)$ ... множина дійсних чисел
  - $\mathbb{R}^+ = (0\,;\,\infty)$ ... множина додатних дійсних чисел
  - $\mathbb{R}_0^+ = \langle 0\,;\,\infty)$ ... множина додатних дійсних чисел + нуль
  - $\mathbb{R}^- = (-\infty\,;\,0)$ ... множина від'ємних дійсних чисел
  - $\mathbb{R}_0^- = (-\infty\,;\,0\rangle$ ... множина від'ємних дійсних чисел + нуль
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ... множина натуральних чисел
  - $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ... множина натуральних чисел + нуль
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \}$ ... множина цілих чисел
  - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ ... множина додатних цілих чисел ($\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$)
  - $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ... множина додатних цілих чисел + нуль ($\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$)
  - $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ ... множина від'ємних цілих чисел
  - $\mathbb{Z}_0^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ ... множина від'ємних цілих чисел + нуль
- $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ... множина дійсних чисел без числа a

Запис інтервалів

- $(a\,;\,b)$ ... Відкритий інтервал (містить дійсні числа між a і b за винятком a а b)
- $\langle a\,;\,b)$ ... Інтервал закритий зліва (містить дійсні числа між a і b включно з і за винятком b)
- $(a\,;\,b\rangle$ ... Інтервал закритий праворуч (містить дійсні числа між a і b включно з b і за винятком a)
- $\langle a\,;\,b\rangle$ ... Закритий інтервал (містить дійсні числа між a і b включно з a і b)
- $(-\infty\,;\,a) \cup (a\,;\,\infty)$ .... аналог запису множини $\mathbb{R} \setminus \{a\}$

Дроби

- додавання, віднімання, множення, ділення дробів
- розширення і скорочення дробу
- перетворення неправильних дробів у мішані і навпаки
- визначення знаку дробу за знаком чисельника і знаменника:
  - $\frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$
  - $\frac{\ominus}{\ominus} = \oplus$
  - $\frac{\oplus}{\ominus} = \ominus$
  - $\frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

Алгебраїчні вирази

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Ступені та корені

- **Формули**
  - $x^m x^n = x^{m+n}$
  - $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
  - $(xy)^n = x^n y^n$
  - $(x^m)^n = x^{mn}$
  - $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
  - $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
  - $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$
- **Конкретні значення**
  - $x^0 = 1$
  - $x^1 = x$
  - $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
  - $x^{-1} = \frac{1}{x}$
  - $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Логарифми

- • Натуральний логарифм $\ldots \log_e(x) = \ln(x)$, $x \in (0\,;\,\infty)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $a\ln(b) = \ln\left(b^a\right)$
- $\ln^a(b) = (\ln(b))^a$
- $\ln(0)$ не існує
- $\ln(1) = 0$

Графіки і форми функцій'

- $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \cos(x)$

Область визначення

- $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$
- $f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x \neq 0$
- $f(x) = \ln(x) \rightarrow x > 0$
- $f(x) = \ln|x| \rightarrow x \neq 0$

Тригонометричні функції

- **Формули**
  - $\sin^a(x) = (\sin(x))^a$
  - $\cos^a(x) = (\cos(x))^a$
  - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
    - $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$
    - $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
  - $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  - $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- **Конкретні значення**
  - $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin(\pi) = 0$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\sin(2\pi) = 0$
  - $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$

Розв'язування рівнянь і нерівностей

- **Розв'язування лінійного рівняння $y = ax + b$ та аналогічних нерівностей**
  - перетворення елемента з лівої частини рівняння в праву частину і навпаки
  - виразити y за допомогою x і виразити x за допомогою y
- **Розв'язування квадратного рівняння $y = ax2 + bx + c$ та аналогічних нерівностей**
  - перетворення елемента з лівої частини рівняння в праву частину і навпаки
  - вирахування дискримінанту $\ldots D = b^2 - 4ac$
  - вирахування кореню x_1, $x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- **Накреслення розв'язку нерівностей на осу координат**