Výzva epidemiologie: dynamické systémy I

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

10. listopadu 2022

Obsah

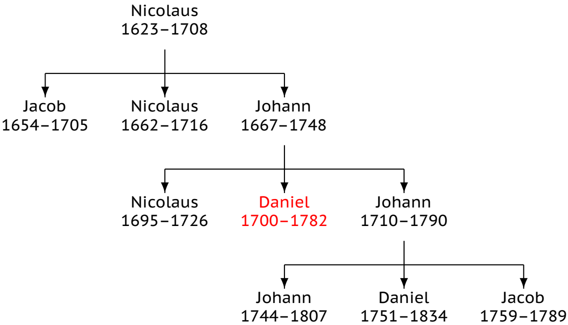
Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Daniel Bernoulli, 1700–1782

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l’inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766



Daniel Bernoulli,
1700–1782

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:
Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

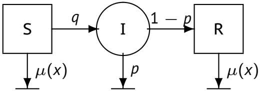
Daniel Bernoulli,
1700–1782

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:
Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Daniel Bernoulli,
1700–1782

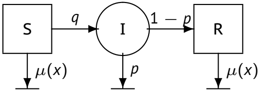


Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:
Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Daniel Bernoulli,
1700–1782



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

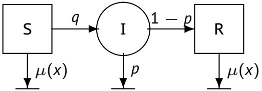
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = q(1-p)S - \mu(x)R$$

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l’inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:
Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Daniel Bernoulli,
1700–1782



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

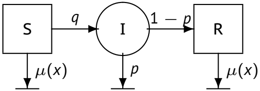
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = q(1-p)S - \mu(x)R$$

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:
Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Daniel Bernoulli, 1700–1782



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.

Existuje konstantní intenzita nákazy q.

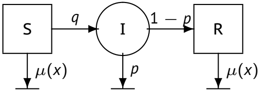
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.

Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře;
pokud nezemře, získá imunitu.

Daniel Bernoulli,
1700–1782



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.

Existuje konstantní intenzita nákazy q.

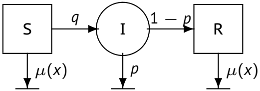
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.

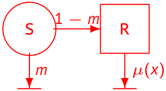
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře;
pokud nezemře, získá imunitu.

Daniel Bernoulli, 1700–1782



$P = S + R$



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l’inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.

Existuje konstantní intenzita nákazy q.

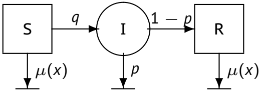
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.

Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře;
pokud nezemře, získá imunitu.

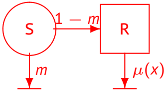
Daniel Bernoulli,
1700–1782



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

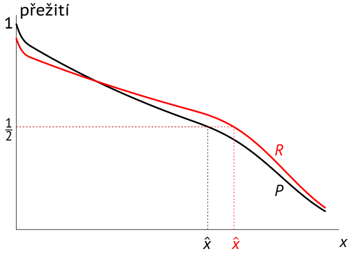


$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

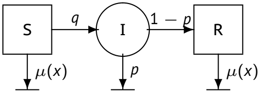
Přínos očkování

D. Bernoulli: Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l’inoculation pour le prévenir. *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, 1–45, 1760/1766

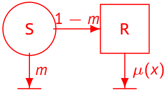
Výsledky:



Daniel Bernoulli,
1700–1782



$P = S + R$



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

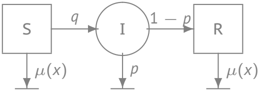
Kritika modelu

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Existuje konstantní intenzita nákazy q.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.
Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře; pokud nezemře, získá imunitu.

Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

Kritika modelu

J. d’Alembert: Sur l’application du calcul des probabilités à l’inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.

Existuje konstantní intenzita nákazy q.

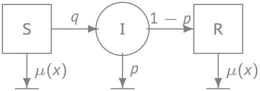
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.

Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.

Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.

Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře; pokud nezemře, získá imunitu.

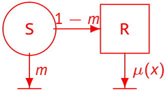
Jean le Rond d’Alembert, 1717–1783



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$



$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

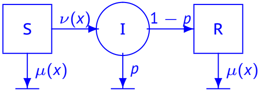
Kritika modelu

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Intenzita nákazy ν závisí na věku x.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.
Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře; pokud nezemře, získá imunitu.

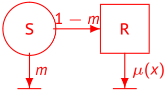
Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -qS - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = qpS - \mu(x)P$$



$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

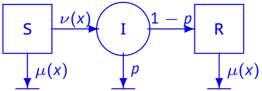
Kritika modelu

J. d'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules mathématiques II*, 26–95, 1761

Předpoklady:

Člověk se rodí citlivý k nákaze neštovicemi.
Intenzita nákazy ν závisí na věku x.
Existuje konstantní intenzita úmrtí na neštovice p.
Kdo neštovice přežije, je k nim imunní.
Intenzita μ úmrtí z jiných příčin závisí na věku x.
Očkovaný novorozenec s pravděpodobností m zemře;
pokud nezemře, získá imunitu.

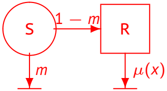
Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783



$P = S + R$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -\nu(x)S - \mu(x)S$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = q\nu(x)S - \mu(x)P$$



$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\mu(x)R$$

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Lodní lékař

Ronald Ross,
1857–1931

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Lodní lékař
Básník a dramatik

This day relenting God
Hath placed within my hand
A wondrous thing; and God
Be praised. At His command,
Seeking His secret deeds
With tears and toiling breath,
I find thy cunning seeds,
O million-murdering Death.
I know this little thing
A myriad men will save.
O Death, where is thy sting?
Thy victory, O Grave?

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria*, John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny
Laureát Nobelovy ceny 1902

Ronald Ross

R. Ross: *The prevention of Malaria,* John Murray, 1910

Ronald Ross,
1857–1931

Lodní lékař
Básník a dramatik
Samouk v matematice
Lékař v koloniích (Indie, Čína)
Profesor tropické medicíny
Laureát Nobelovy ceny 1902

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

Ronald Ross

N – počet lidí	M – počet komárů
$x = x(t)$ – počet nakažených	$z = z(t)$ – počet infekčních
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk	c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
r – rychlost uzdravení	g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$\begin{aligned} x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\ z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz \end{aligned}$$

Ronald Ross

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\to$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\to$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$
\begin{aligned}
x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\
z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz
\end{aligned}
$$

Equilibrium: $x^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2M + carN}N,\ z^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2 + bag}$

Ronald Ross

N – počet lidí
$x = x(t)$ – počet nakažených
b – intenzita přenosu komár $\rightarrow$ člověk
r – rychlost uzdravení

M – počet komárů
$z = z(t)$ – počet infekčních
c – intenzita přenosu člověk $\rightarrow$ komár
g – mortalita komárů

a – intenzita napadání lidí komáry

$$
\begin{aligned}
x' &= ba\frac{N-x}{N}z - rx \\
z' &= ca\frac{x}{N}(M-z) - gz
\end{aligned}
$$

Equilibrium: $x^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2M + carN}N,\ z^* = \dfrac{cba^2M - grN}{cba^2 + bag}$

Podmínka existence: $\dfrac{M}{N} > \dfrac{gr}{cba^2}$

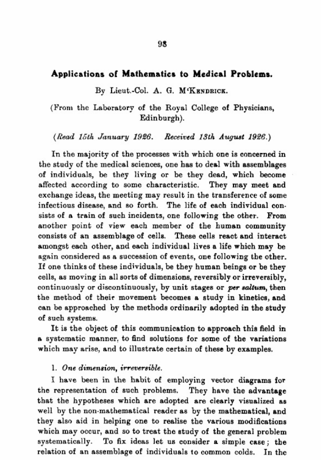
Aplikace matematiky v medicínských problémech

A.G. McKendrick: Application of mathematics to medical problems. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **13**, 93–130, 1926

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

Aplikace matematiky v medicínských problémech

A.G. McKendrick: Application of mathematics to medical problems. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **13**, 93–130, 1926



93

Applications of Mathematics to Medical Problems.

By Lieut.-Col. A. G. M'Kendrick.

(From the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh).

(*Read 15th January 1926. Received 13th August 1926.*)

In the majority of the processes with which one is concerned in the study of the medical sciences, one has to deal with assemblages of individuals, be they living or be they dead, which become affected according to some characteristic. They may meet and exchange ideas, the meeting may result in the transference of some infectious disease, and so forth. The life of each individual consists of a train of such incidents, one following the other. From another point of view each member of the human community consists of an assemblage of cells. These cells react and interact amongst each other, and each individual lives a life which may be again considered as a succession of events, one following the other. If one thinks of these individuals, be they human beings or be they cells, as moving in all sorts of dimensions, reversibly or irreversibly, continuously or discontinuously, by unit stages or *per saltum*, then the method of their movement becomes a study in kinetics, and can be approached by the methods ordinarily adopted in the study of such systems.

It is the object of this communication to approach this field in a systematic manner, to find solutions for some of the variations which may arise, and to illustrate certain of these by examples.

1. *One dimension, irreversible.*

I have been in the habit of employing vector diagrams for the representation of such problems. They have the advantage that the hypotheses which are adopted are clearly visualized as well by the non-mathematical reader as by the mathematical, and they also aid in helping one to realise the various modifications which may occur, and so to treat the study of the general problem systematically. To fix ideas let us consider a simple case; the relation of an assemblage of individuals to common colds. In the

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

Aplikace matematiky v medicínských problémech

A.G. McKendrick: Application of mathematics to medical problems. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **13**, 93–130, 1926

93

Applications of Mathematics to Medical Problems.

By Lieut.-Col. A. G. M'Kendrick.

(From the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh).

(*Read 15th January 1926. Received 13th August 1926.*)

In the majority of the processes with which one is concerned in the study of the medical sciences, one has to deal with assemblages of individuals, be they living or be they dead, which become affected according to some characteristic. They may meet and exchange ideas, the meeting may result in the transference of some infectious disease, and so forth. The life of each individual consists of a train of such incidents, one following the other. From another point of view each member of the human community consists of an assemblage of cells. These cells react and interact amongst each other, and each individual lives a life which may be again considered as a succession of events, one following the other. If one thinks of these individuals, be they human beings or be they cells, as moving in all sorts of dimensions, reversibly or irreversibly, continuously or discontinuously, by unit stages or *per saltum*, then the method of their movement becomes a study in kinetics, and can be approached by the methods ordinarily adopted in the study of such systems.

It is the object of this communication to approach this field in a systematic manner, to find solutions for some of the variations which may arise, and to illustrate certain of these by examples.

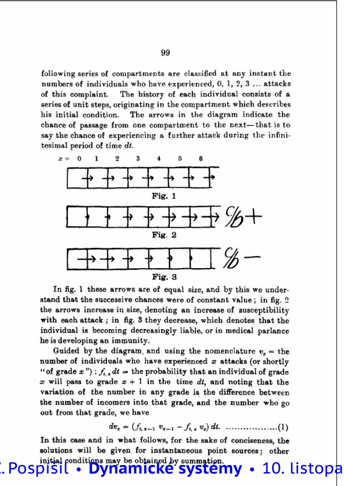
1. *One dimension, irreversible.*

I have been in the habit of employing vector diagrams for the representation of such problems. They have the advantage that the hypotheses which are adopted are clearly visualized as well by the non-mathematical reader as by the mathematical, and they also aid in helping one to realise the various modifications which may occur, and so to treat the study of the general problem systematically. To fix ideas let us consider a simple case; the relation of an assemblage of individuals to common colds. In the

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

Aplikace matematiky v medicínských problémech

A.G. McKendrick: Application of mathematics to medical problems. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **13**, 93–130, 1926



99

following series of compartments are classified at any instant the numbers of individuals who have experienced, 0, 1, 2, 3 ... attacks of this complaint. The history of each individual consists of a series of unit steps, originating in the compartment which describes his initial condition. The arrows in the diagram indicate the chance of passage from one compartment to the next—that is to say the chance of experiencing a further attack during the infinitesimal period of time dt.

$x =$ 0 1 2 3 4 5 6

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

In fig. 1 these arrows are of equal size, and by this we understand that the successive chances were of constant value; in fig. 2 the arrows increase in size, denoting an increase of susceptibility with each attack; in fig. 3 they decrease, which denotes that the individual is becoming decreasingly liable, or in medical parlance he is developing an immunity.

Guided by the diagram, and using the nomenclature v_x = the number of individuals who have experienced x attacks (or shortly "of grade x"); $f_{t,x}\,dt$ = the probability that an individual of grade x will pass to grade $x+1$ in the time dt, and noting that the variation of the number in any grade is the difference between the number of incomers into that grade, and the number who go out from that grade, we have

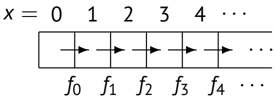
$$dv_x = (f_{t,x-1}\, v_{x-1} - f_{t,x}\, v_x)\, dt. \quad \text{..................(1)}$$

In this case and in what follows, for the sake of conciseness, the solutions will be given for instantaneous point sources; other initial conditions may be obtained by summation.

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

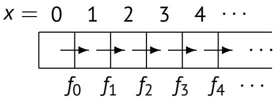
Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy



Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

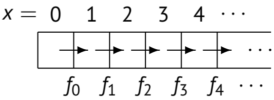


x … počet ataků jedné choroby

f_x … pravděpodobnost ataku po x-té nákaze

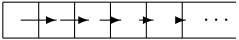
Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

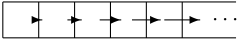


x … počet ataků jedné choroby

f_x … pravděpodobnost ataku po x-té nákaze



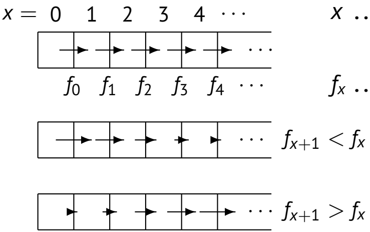
$f_{x+1} < f_x$ vzniká (nedokonalá) imunita



$f_{x+1} > f_x$ choroba oslabuje

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy



x … počet ataků jedné choroby

f_x … pravděpodobnost ataku po x-té nákaze

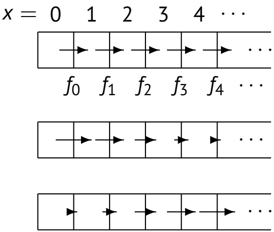
vzniká (nedokonalá) imunita

choroba oslabuje

$v = v(x)$ … počet subjektů v kompartmentu x

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy



x … počet ataků jedné choroby

f_x … pravděpodobnost ataku po x-té nákaze

$f_{x+1} < f_x$ vzniká (nedokonalá) imunita

$f_{x+1} > f_x$ choroba oslabuje

$v = v(x)$ … počet subjektů v kompartmentu x

Model:

$$\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = -f_0(t)v_0, \quad v_0(0) = N,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -f_x(t)v_x + f_{x-1}(t)v_{x-1}, \quad v_x(0) = 0, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

Model:

$$\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = -f_0(t)v_0, \quad v_0(0) = N,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -f_x(t)v_x + f_{x-1}(t)v_{x-1}, \quad v_x(0) = 0, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

Model:

$$\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = -f_0(t)v_0, \quad v_0(0) = N,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -f_x(t)v_x + f_{x-1}(t)v_{x-1}, \quad v_x(0) = 0, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Lineární systém, explicitně řešitelný

$$v_0(t) = N \exp\left\{ -\int_0^t f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\},$$
$$v_x(t) = \exp\left\{ -\int_0^t f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\} \int_0^t f_{x-1}(s)v_{x-1}(s) \exp\left\{ \int_0^s f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_0(t) = N \exp\left\{ -\int_0^t f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\},$$

$$v_x(t) = \exp\left\{ -\int_0^t f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\} \int_0^t f_{x-1}(s) v_{x-1}(s) \exp\left\{ \int_0^s f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_0(t) = N \exp\left\{-\int_0^t f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\},$$

$$v_x(t) = \exp\left\{-\int_0^t f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\}\int_0^t f_{x-1}(s)v_{x-1}(s)\exp\left\{\int_0^s f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

První přiblížení: $f_x(t) = \varphi(t)(1 + cx), \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_0(t) = N \exp\left\{-\int_0^t f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\},$$

$$v_x(t) = \exp\left\{-\int_0^t f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\}\int_0^t f_{x-1}(s)v_{x-1}(s)\exp\left\{\int_0^s f_x(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

První přiblížení: $f_x(t) = \varphi(t)(1 + cx), \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$v_0(t) = N\Phi(t),$$

$$v_x(t) = \big(1 + c(x-1)\big)\Phi(t)^{1+cx}\int_0^t v_{x-1}(s)\varphi(s)\Phi(s)^{-1-cx}\mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

kde $\Phi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \varphi(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma.$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

První přiblížení: $f_x(t) = \varphi(t)(1+cx), \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$v_0(t) = N\Phi(t),$$
$$v_x(t) = \big(1 + c(x-1)\big)\Phi(t)^{1+cx} \int_0^t v_{x-1}(s)\varphi(s)\Phi(s)^{-1-cx}\mathrm{d}s, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

kde $\Phi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \varphi(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma.$

$$v_x(t) = \frac{N}{x!}\Phi(t)\left(1 - \Phi(t)^c\right)^x \prod_{i=0}^{x-1} \frac{1+ci}{c}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_x(t) = \frac{N}{x!}\Phi(t)\left(1 - \Phi(t)^c\right)^x \prod_{i=0}^{x-1} \frac{1+ci}{c}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_x(t) = \frac{N}{x!}\Phi(t)\left(1-\Phi(t)^c\right)^x\prod_{i=0}^{x-1}\frac{1+ci}{c}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Náhodná veličina „počet subjektů v x-tém kompartmentu v čase t“:

pravděpodobnostní funkce $p_x(t) = \dfrac{1}{N}v_x(t)$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_x(t) = \frac{N}{x!}\Phi(t)\left(1 - \Phi(t)^c\right)^x \prod_{i=0}^{x-1} \frac{1+ci}{c}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Náhodná veličina „počet subjektů v x-tém kompartmentu v čase t“:

pravděpodobnostní funkce $p_x(t) = \dfrac{1}{N} v_x(t)$

střední hodnota $\mu = \mu(t)$

rozptyl $\sigma^2 = \Phi(t)^{-c}\mu(t)$

Aplikace matematiky v medicínských problémech

Nevratné jednodimenzionální procesy

$$v_x(t) = \frac{N}{x!}\Phi(t)\left(1-\Phi(t)^c\right)^x \prod_{i=0}^{x-1}\frac{1+ci}{c}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Náhodná veličina „počet subjektů v x-tém kompartmentu v čase t“:

pravděpodobnostní funkce $p_x(t) = \frac{1}{N}v_x(t)$

střední hodnota $\mu = \mu(t)$

rozptyl $\sigma^2 = \Phi(t)^{-c}\mu(t)$

Odtud

$$p_x(t) = \sqrt[c]{\frac{\mu}{\sigma^2}}\prod_{i=0}^{x-1}\frac{1+c_i}{c(1+i)}\left(1-\frac{\mu}{\sigma_2}\right)$$

Příspěvek k matematické teorii epidemií

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **107**, 700–721, 1927

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics II. The problem of endemicity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **138**, 94–122, 1932

W.O. Kermack, A.G. McKendrick: A contribution to the mathematical theory of epidemics III. Further studies of the problem of endemicity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **141**, 94–122, 1933

Anderson Gray McKendrick, 1876–1943

William Ogilvy Kermack, 1898–1970

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

V uzavřené populaci je změna veličiny $S(t)$ způsobena pouze přenosem infekce,

$$\dot{S}(t) = -\text{incidence}$$

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

V uzavřené populaci je změna veličiny $S(t)$ způsobena pouze přenosem infekce,

$$\dot{S}(t) = -\text{incidence}$$

$A(\tau) :=$ očekávaný příspěvek jedince, který se nakazil před časem τ, k síle infekce $F(t)$.

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

V uzavřené populaci je změna veličiny $S(t)$ způsobena pouze přenosem infekce,

$$\dot{S}(t) = -\text{incidence}$$

$A(\tau) :=$ očekávaný příspěvek jedince, který se nakazil před časem τ, k síle infekce $F(t)$.

$$F(t) = \int_0^\infty F(t-\tau)S(t-\tau)A(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

V uzavřené populaci je změna veličiny $S(t)$ způsobena pouze přenosem infekce,

$$\dot{S}(t) = -\text{incidence} = -F(t)S(t) \quad \Rightarrow \quad S(t) = S_{-\infty}\mathrm{e}^{-\int\limits_{-\infty}^{t} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}.$$

$A(\tau) :=$ očekávaný příspěvek jedince, který se nakazil před časem τ, k síle infekce $F(t)$.

$$F(t) = \int\limits_0^\infty F(t-\tau)S(t-\tau)A(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$S(t) :=$ velikost (hustota) populace citlivých jedinců,
$F(t) :=$ síla infekce v čase t (intenzita pravděpodobnosti, že se citlivý jedinec nakazí),
incidence $= F(t)S(t)$.

V uzavřené populaci je změna veličiny $S(t)$ způsobena pouze přenosem infekce,

$$\dot{S}(t) = -\text{incidence} = -F(t)S(t) \quad \Rightarrow \quad S(t) = S_{-\infty}\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{t} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}.$$

$A(\tau) :=$ očekávaný příspěvek jedince, který se nakazil před časem τ, k síle infekce $F(t)$.

$$F(t) = \int_0^\infty F(t-\tau)S(t-\tau)A(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Nelineární rovnice obnovy

$$F(t) = N\int_{-\infty}^{t} F(\tau)A(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$$F(t) = N \int_{-\infty}^{t} F(\tau)A(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau$$

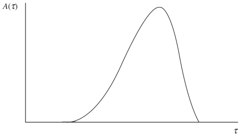
$A(\tau)$ ... funkce nakažlivosti (infectivity function)

Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = N \int_{-\infty}^{t} F(\tau)A'(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau$$

$A(\tau)$ ...funkce nakažlivosti (infectivity function)



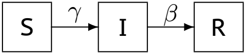
Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = N \int_{-\infty}^{t} F(\tau)A'(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau$$

$A(\tau)$ …funkce nakažlivosti (infectivity function)

$A(\tau) = \gamma \mathrm{e}^{-\beta\tau}$: SIR



Příspěvek k matematické teorii epidemií

Nelineární rovnice obnovy

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = N \int_{-\infty}^{t} F(\tau)A'(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_{-\infty}^{\tau} F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau$$

$A(\tau)$ …funkce nakažlivosti (infectivity function)

$A(\tau) = \gamma \mathrm{e}^{-\beta\tau}$: SIR

$$\mathrm{S} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{I} \xrightarrow{\beta} \mathrm{R}$$

$A(\tau) = \beta \dfrac{\gamma}{\gamma-\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-\gamma\tau}\right)$: SEIR

$$\mathrm{S} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{E} \xrightarrow{\beta} \mathrm{I} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{R}$$

Systém SIR

Summary.

The various possible mechanisms for the production of ammonia in a nitrogen hydrogen mixture by means of thermions have been investigated in detail. It is shown that synthesis can occur due to the following reactions—

$N_2 + H$ at the surface of platinum or nickel.
$N_2 + H'$ in the bulk at 13 volts.

The following molecular species are shown to be chemically reactive—

N_2^+ in the bulk at 17 volts,
N^+ in the bulk at 23 volts,

and possible modes of mechanism involving N_2' and H' are elaborated.

Our thanks are due to Prof. T. M. Lowry, F.R.S., who communicated this paper, and to Messrs. Brunner Mond and Co., for providing a grant to defray part of the cost of the apparatus employed.

A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.

By W. O. Kermack and A. G. McKendrick.

(Communicated by Sir Gilbert Walker, F.R.S.—Received May 13, 1927.)

(From the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh.)

Introduction.

(1) One of the most striking features in the study of epidemics is the difficulty of finding a causal factor which appears to be adequate to account for the magnitude of the frequent epidemics of disease which visit almost every population. It was with a view to obtaining more insight regarding the effects of the various factors which govern the spread of contagious epidemics that the present investigation was undertaken. Reference may here be made to the work of Ross and Hudson (1915–17) in which the same problem is attacked. The problem is here carried to a further stage, and it is considered from a point of view which is in one sense more general. The problem may be summarised as follows: One (or more) infected person is introduced into a community of individuals, more or less susceptible to the disease in question. The disease spreads from

Systém SIR

Summary.

The various possible mechanisms for the production of ammonia in a nitrogen hydrogen mixture by means of thermions have been investigated in detail. It is shown that synthesis can occur due to the following reactions—

$N_2 + H$ at the surface of platinum or nickel.
$N_2 + H'$ in the bulk at 13 volts.

The following molecular species are shown to be chemically reactive—

N_2^+ in the bulk at 17 volts,
N^+ in the bulk at 23 volts,

and possible modes of mechanism involving N_2' and H' are elaborated.

Our thanks are due to Prof. T. M. Lowry, F.R.S., who communicated this paper, and to Messrs. Brunner Mond and Co., for providing a grant to defray part of the cost of the apparatus employed.

A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.

By W. O. Kermack and A. G. McKendrick.

(Communicated by Sir Gilbert Walker, F.R.S.—Received May 13, 1927.)

(From the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh.)

Introduction.

(1) One of the most striking features in the study of epidemics is the difficulty of finding a causal factor which appears to be adequate to account for the magnitude of the frequent epidemics of disease which visit almost every population. It was with a view to obtaining more insight regarding the effects of the various factors which govern the spread of contagious epidemics that the present investigation was undertaken. Reference may here be made to the work of Ross and Hudson (1915–17) in which the same problem is attacked. The problem is here carried to a further stage, and it is considered from a point of view which is in one sense more general. The problem may be summarised as follows: One (or more) infected person is introduced into a community of individuals, more or less susceptible to the disease in question. The disease spreads from

from the consideration of the special case in which ϕ and ψ are constants κ and l respectively.

In this case the equations are

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\kappa xy \\ \frac{dy}{dt} &= \kappa xy - ly \\ \frac{dz}{dt} &= ly \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

and as before $x + y + z = \mathrm{N}$.

Thus

$$\frac{dz}{dt} = l\,(\mathrm{N} - x - z),$$

and $\frac{dx}{dz} = -\frac{\kappa}{l}x$, whence $\log\frac{x_0}{x} = \frac{\kappa}{l}z$, since we assume that z_0 is zero.

Thus

$$\frac{dz}{dt} = l\left(\mathrm{N} - x_0 e^{-\frac{\kappa}{l}z} - z\right).$$

Since it is impossible from this equation to obtain z as an explicit function of t, we may expand the exponential term in powers of $\frac{\kappa}{l}z$, and we shall assume that $\frac{\kappa}{l}z$ is small compared with unity.

Thus

$$\frac{dz}{dt} = l\left\{\mathrm{N} - x_0 + \left(\frac{\kappa}{l}x_0 - 1\right)z - \frac{x_0\kappa^2 z^2}{2l^2}\right\}.$$

But $\mathrm{N} - x_0 = y_0$, where y_0 is small. It is for this reason that we have to take into consideration the third term in z^2, as although $\frac{\kappa}{l}z$ is small compared with unity, its square may not be small as compared with $\left(\frac{\kappa}{l}x_0 - 1\right)z$.

The solution of this equation is

$$z = \frac{l^2}{\kappa^2 x_0}\left\{\frac{\kappa}{l}x_0 - 1 + \sqrt{-q}\tanh\left(\frac{\sqrt{-q}}{2}lt - \phi\right)\right\} \qquad (30)$$

where

$$\phi = \tanh^{-1}\frac{\frac{\kappa}{l}x_0 - 1}{\sqrt{-q}},$$

Systém SIR

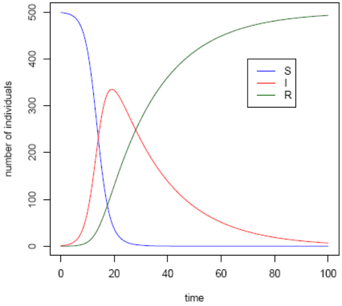
$$
\begin{aligned}
S' &= -\gamma SI \\
I' &= \gamma SI - \beta I \\
R' &= \beta I
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathrm{S}} \xrightarrow{\gamma} \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{\beta} \boxed{\mathrm{R}}$$

Systém SIR

$$
\begin{aligned}
S' &= -\gamma S I\\
I' &= \gamma S I - \beta I\\
R' &= \beta I
\end{aligned}
$$

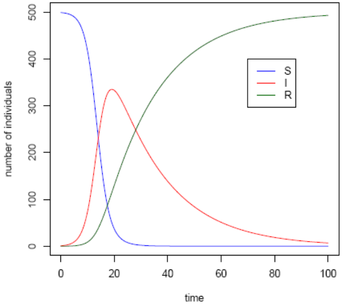
$$\boxed{S} \xrightarrow{\gamma} \boxed{I} \xrightarrow{\beta} \boxed{R}$$

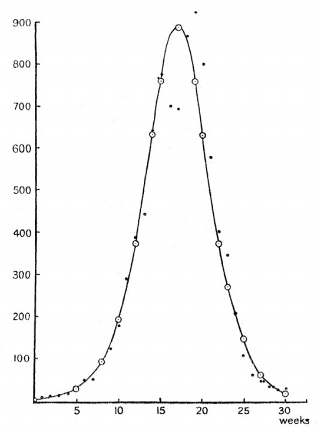


Systém SIR

$$
\begin{aligned}
S' &= -\gamma S I \\
I' &= \gamma S I - \beta I \\
R' &= \beta I
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{S} \xrightarrow{\gamma} \boxed{I} \xrightarrow{\beta} \boxed{R}
$$





Systém SIR

Možnost predikce vývoje epidemie

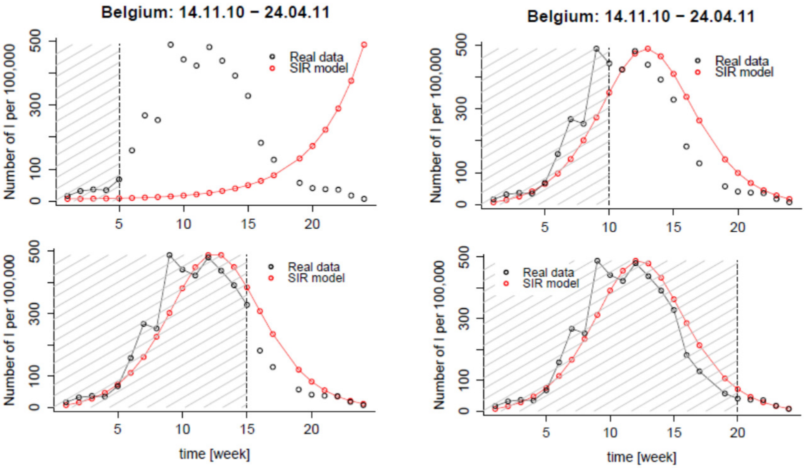
R. Kůs: *Deterministické modely v epidemiologii.* BP MU 2013

Radomír Kůs

Systém SIR

Možnost predikce vývoje epidemie

R. Kůs: *Deterministické modely v epidemiologii.* BP MU 2013



Systém SIR

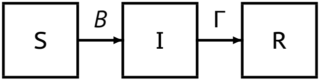
Možnost predikce vývoje epidemie

Je důležité si uvědomit, že modely nám sice jen málokdy poskytují přesný obrázek reality, zato nám pomáhají ji pochopit.

Ólafur Flóvenz

Systém SIR

Možnost predikce účinnosti protiepidemických opatřeni



Systém SIR

Možnost predikce účinnosti protiepidemických opatřeni

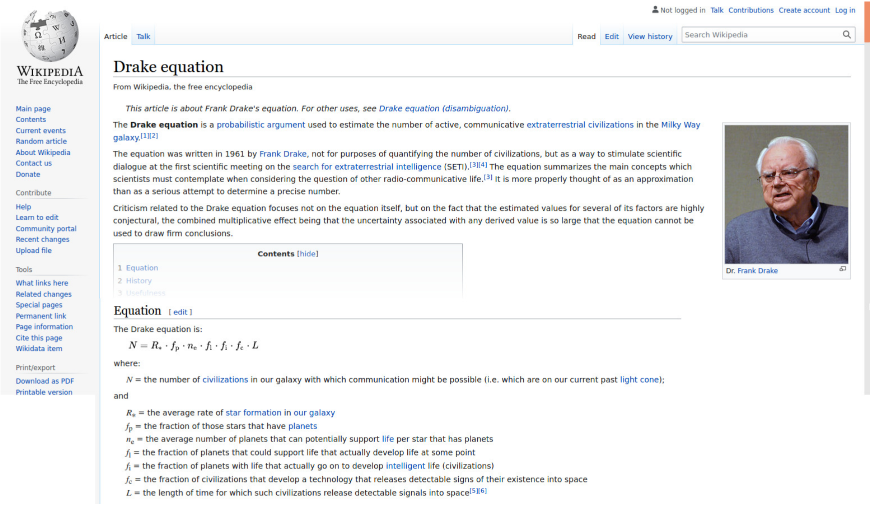
$$\boxed{\mathrm{S}} \xrightarrow{B} \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{\Gamma} \boxed{\mathrm{R}}$$

$$B = N\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6$$

N	velikost populace
p_1	P(setkání jedinců), $p_1 = p_1(S + I + R)$
p_2	P(jeden je S, druhý I), $p_2 = p_2(S, I)$
p_3	P(setkání je „nadkritické“, intenzivní), p_3 závisí na chování
p_4	P(I přenese virus na S), p_4 závisí na teplotě, vlhkosti, …
p_5	P(virus se na I uchytí), p_5 závisí na slizniční imunitě
p_6	P(virus se v namnoží), p_6 závisí na vnitřní imunitě

Systém SIR

Možnost predikce účinnosti protiepidemických opatřeni



Not logged in Talk Contributions Create account Log in

Article Talk Read Edit View history Search Wikipedia

WIKIPEDIA The Free Encyclopedia

Main page
Contents
Current events
Random article
About Wikipedia
Contact us
Donate

Contribute
Help
Learn to edit
Community portal
Recent changes
Upload file

Tools
What links here
Related changes
Special pages
Permanent link
Page information
Cite this page
Wikidata item

Print/export
Download as PDF
Printable version

Drake equation

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article is about Frank Drake's equation. For other uses, see Drake equation (disambiguation).

The **Drake equation** is a probabilistic argument used to estimate the number of active, communicative extraterrestrial civilizations in the Milky Way galaxy.[1][2]

The equation was written in 1961 by Frank Drake, not for purposes of quantifying the number of civilizations, but as a way to stimulate scientific dialogue at the first scientific meeting on the search for extraterrestrial intelligence (SETI).[3][4] The equation summarizes the main concepts which scientists must contemplate when considering the question of other radio-communicative life.[3] It is more properly thought of as an approximation than as a serious attempt to determine a precise number.

Criticism related to the Drake equation focuses not on the equation itself, but on the fact that the estimated values for several of its factors are highly conjectural, the combined multiplicative effect being that the uncertainty associated with any derived value is so large that the equation cannot be used to draw firm conclusions.

Dr. Frank Drake

Contents [hide]

1 Equation
2 History
3 Usefulness

Equation [edit]

The Drake equation is:

$$N = R_* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_l \cdot f_i \cdot f_c \cdot L$$

where:

N = the number of civilizations in our galaxy with which communication might be possible (i.e. which are on our current past light cone);

and

R_* = the average rate of star formation in our galaxy
f_p = the fraction of those stars that have planets
n_e = the average number of planets that can potentially support life per star that has planets
f_l = the fraction of planets that could support life that actually develop life at some point
f_i = the fraction of planets with life that actually go on to develop intelligent life (civilizations)
f_c = the fraction of civilizations that develop a technology that releases detectable signs of their existence into space
L = the length of time for which such civilizations release detectable signals into space[5][6]

Systém SIR

Možnost predikce účinnosti protiepidemických opatřeni

$$\boxed{\text{S}} \xrightarrow{B} \boxed{\text{I}} \xrightarrow{\Gamma} \boxed{\text{R}}$$

$$B = N\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5\,p_6\,p_7$$

N	velikost populace
p_1	P(setkání jedinců), $p_1 = p_1(S+I+R)$
p_2	P(jeden je S, druhý I), $p_2 = p_2(S,I)$
p_3	P(setkání je „nadkritické“, intenzivní), p_3 závisí na chování
p_4	P(I přenese virus na S), p_4 závisí na teplotě, vlhkosti, …
p_5	P(virus se na I uchytí), p_5 závisí na slizniční imunitě
p_6	P(virus se v namnoží), p_6 závisí na vnitřní imunitě
p_7	P(jedinec onemocní), $p_7 = 1$?

MASARYKOVA
UNIVERZITA