MUNI

Výzva ekologie a historiografie: dynamické systémy II

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

24. listopadu 2022

Obsah

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$x(t+1) = x(t) + \text{novorození} - \text{zemřelí}$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$x(t+1) = x(t) + \text{novorození} - \text{zemřelí}$

Leonhard Euler, 1707–1783

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost
množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ $\quad$ b – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ $\quad$ d – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t)+bx(t)-dx(t) = x(t)(1+b-d)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ b – porodnost
množství zemřelých je úměrné $x(t)$ d – úmrtnost

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = x(t)+bx(t)-dx(t) = x(t)(1+b-d)$$

Předpoklady:

- množství novorozených je úměrné $x(t)$ — b – porodnost
- množství zemřelých je úměrné $x(t)$ — d – úmrtnost ($d < 1 + b$)

$r = 1 + b - d$

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

Leonhard Euler, 1707–1783

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t)$$

Předpoklady:

množství novorozených je úměrné $x(t)$ $\quad b$ – porodnost

množství zemřelých je úměrné $x(t)$ $\quad d$ – úmrtnost ($d < 1 + b$)

$r = 1 + b - d$

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t)$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0 \quad \to \quad x(t) = x_0 r^t$$

Leonhard Euler, 1707–1783

Růst populace

Euler, Malthus

L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* Tomus primus, Lausanne 1748

$x = x(t)$ – velikost populace v čase t

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 r^t$$

Leonhard Euler, 1707–1783

T.R. Malthus: *An Essay on the Principle of Population,* London 1798

Velikost populace roste jako geometrická posloupnost, množství zdrojů jako aritmetická posloupnost.

Thomas R. Malthus, 1766–1834

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben*, Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.

Růst populace

Euler, Süßmilch

J.P. Süßmilch: *Die göttliche Ordnung in der Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Gebur, der Tode un der Fortpflanzung desselben,* Berlin 1761

L. Euler: Recherches génerales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Hist. Acad. R. Sci. B.-Lett. Berl.* **16**, 144-164, 1760/1767

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

Růst populace

Euler, Süßmilch

Johann Peter Süßmilch,
1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$n(t) \quad = \quad n(t-11) + n(t-12) + n(t-13)$$

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$\begin{aligned} n(t) &= n(t-11) + n(t-12) + n(t-13) \\ d(t) &= n(t-20) \end{aligned}$$

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t
$d = d(t)$ – počet zemřelých párů v čase t

Růst populace

Euler, Süßmilch

$$\begin{aligned} n(t) &= n(t-11) + n(t-12) + n(t-13) \\ d(t) &= n(t-20) \\ x(t) &= x(t-1) + n(t) - d(t) \end{aligned}$$

Johann Peter Süßmilch, 1707–1767

Předpoklady:

- Lidé se žení a vdávají ve 20 letech.
- Každý pár má 6 dětí, 3 chlapce a 3 děvčata.
- První pár dětí „vyprodukují“ rodiče ve 22, druhý ve 24 a třetí v 26 letech.
- Lidé umírají ve 40 letech

t – čas, jednotka je 2 roky
$n = n(t)$ – počet novorozených párů v čase t
$d = d(t)$ – počet zemřelých párů v čase t
$x = x(t)$ – počet žijících párů v čase t

Růst populace

Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

Růst populace

Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

Potkani ve skladech obilí

t – čas, jednotka je 1 měsíc
k – maximální možný věk samice
$n_i = n_i(t)$ – počet samic věku $\langle i-1, i)$ v čase t, $i = 1, 2, \dots k$
f_i – plodnost samice věku i; $f_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$
p_i – pravděpodobnost přežití samice věkové třídy $i-1$ do třídy i;
$0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, k-1$

Růst populace

Leslie, Caswell

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Potkani ve skladech obilí

t – čas, jednotka je 1 měsíc
k – maximální možný věk samice
$n_i = n_i(t)$ – počet samic věku $\langle i-1, i)$ v čase t, $i = 1, 2, \ldots k$
f_i – plodnost samice věku i; $f_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$
p_i – pravděpodobnost přežití samice věkové třídy $i-1$ do třídy i;
$0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$
\begin{aligned}
n_1(t+1) &= f_1 n_1(t) + f_2 n_2(t) + \cdots + f_k n_k(t) \\
n_i(t+1) &= p_i n_{i-1}(t), \qquad i = 2, 3, \ldots, k
\end{aligned}
$$

Růst populace

Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Potkani ve skladech obilí

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \\ \vdots \\ n_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \\ \vdots \\ n_k(t) \end{pmatrix}$$

Růst populace

Leslie, Caswell

P.H. Leslie: On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**, 213-245, 1945

Potkani ve skladech obilí

Patrick Holt Leslie, 1900–1972

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ n_4(t+1) \\ \vdots \\ n_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \\ \vdots \\ n_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{n}(t)$$

Růst populace

Leslie, Caswell

Hall Caswell,
1949–

H. Caswell: *Matrix Population Models*, Sinauer, 2001

$$\boldsymbol{n}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{n}(t)$$

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

A.J. Lotka: Undamped oscillation derived from the law of mass action. *J. Amer.Chem. Soc.* **42**, 1595–1599, 1920

A.J. Lotka: *Elements of Physical Biology*. Williams&Wilkins, 1925

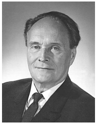
V. Volterra: Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Mem. Accad. Lincei* **6**, 31–113, 1926

V. Volterra: *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, 1931

G.F. Gause: *The struggle for existence*. Williams&Wilkins, 1934

Alfred Lotka, 1880–1949

Vito Volterra, 1860–1940



Георгий Францевич Гаузе, 1910–1986

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

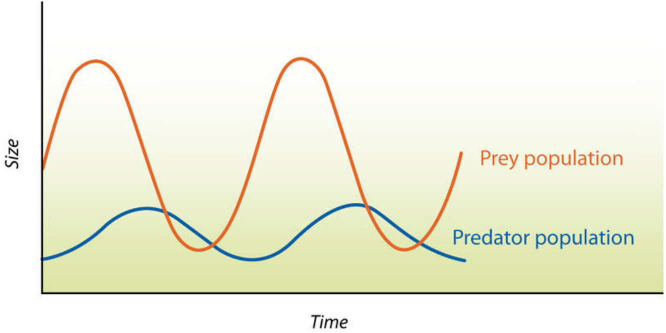
$$x' = ax - bxy$$
$$y' = -cy + dxy$$

Model dravec-kořist (konzument-producent)

Lotka, Volterra, Gause

$x = x(t)$ – velikost populace kořisti (producenta)
$y = y(t)$ – velikost populace dravce (konzumenta)

$$x' = ax - bxy$$
$$y' = -cy + dxy$$



Ekologická stabilita

Svirežev, Logofet, Thieme, Smith

Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет: *Устойчивость биологическич сообЩеств.* Наука, 1978

H.L. Smith, H.R. Thieme: *Dynamical Systems and Population Persistence.* AMS, 2011

Юрий М. Свирежев

1938-2007

Дмитрий О. Логофет

Horst R. Thieme

Hal L. Smith

Kléiodynamika (Cliodynamics)

Κλειώ

Peter Turchin

Пётр Валентинович Турчин, 1957, Obninsk, SSSR, syn sovětského disidenta Valentina Turčina

Peter Turchin

Пётр Валентинович Турчин, 1957, Obninsk, SSSR, syn sovětského disidenta Valentina Turčina

- Od r. 1977 v exilu
- 1980 – B.A. New York University, biologie
- 1985 – Ph.D. Duke University, zoologie
- Profesor University of Connecticut

Peter Turchin

Пётр Валентинович Турчин, 1957, Obninsk, SSSR, syn sovětského disidenta Valentina Turčina

- Od r. 1977 v exilu
- 1980 – B.A. New York University, biologie
- 1985 – Ph.D. Duke University, zoologie
- Profesor University of Connecticut, depts.
  - Ecology and Evolutionary Biology
  - Mathematics
  - Anthropology

Peter Turchin

Пётр Валентинович Турчин, 1957, Obninsk, SSSR, syn sovětského disidenta Valentina Turčina

- Od r. 1977 v exilu
- 1980 – B.A. New York University, biologie
- 1985 – Ph.D. Duke University, zoologie
- Profesor University of Connecticut, depts.
  - Ecology and Evolutionary Biology
  - Mathematics
  - Anthropology

Kleiódynamika: průnik makrosociologie
kleiómetrie (cliometrics)
matematického modelování

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Základní předpoklad:
podstata (idea) dějin je přístupná porozumění

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Základní předpoklad:
podstata (idea) dějin je přístupná porozumění
Technické předpoklady:
stav světa je vyjádřen dynamickými veličinami,

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Základní předpoklad:
podstata (idea) dějin je přístupná porozumění
Technické předpoklady:
stav světa je vyjádřen dynamickými veličinami,
jejich vztahy jsou také dynamické –
jedna veličina koreluje se změnou jiné

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Základní předpoklad:
podstata (idea) dějin je přístupná porozumění
Technické předpoklady:
stav světa je vyjádřen dynamickými veličinami,
jejich vztahy jsou také dynamické –
jedna veličina koreluje se změnou jiné

$$X = X(t),\ Y = Y(t), \dots$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \sim Y,\ \Delta X \sim Y, \dots$$

Matematické modelování historie

Dějiny: *bytnost* dějin (the idea of history)
smysl dějin (the meaning in history)

Základní předpoklad:
podstata (idea) dějin je přístupná porozumění
Technické předpoklady:
stav světa je vyjádřen dynamickými veličinami,
jejich vztahy jsou také dynamické –
jedna veličina koreluje se změnou jiné

$$X = X(t),\ Y = Y(t), \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \sim Y,\ \Delta X \sim Y, \ldots$$

Vhodným nástrojem jsou opět **diferenciální** nebo **diferenční rovnice**

Válčení: selekční tlak

P. Turchin, A. Korotayev: Population Dynamics and Internal Warfare: A reconsideration. *Social Evolution & History* 2006, p. 112–147

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r - \delta W$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
(válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r - \delta W$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost", příčinou boje je msta)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r - \delta W \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= -bW \end{aligned}$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný jeho intenzitě i velikosti populace

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r - \delta W \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= - bW\end{aligned}$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný jeho intenzitě i velikosti populace

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r - \delta W \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aWN - bW
\end{aligned}
$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný jeho intenzitě i velikosti populace

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aWN - bW
\end{aligned}
$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace způsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný jeho intenzitě i velikosti populace

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aWN - bW
\end{aligned}
$$

$$H = b \ln N + r \ln W - aN - \delta W$$

Války v prvobytných společnostech

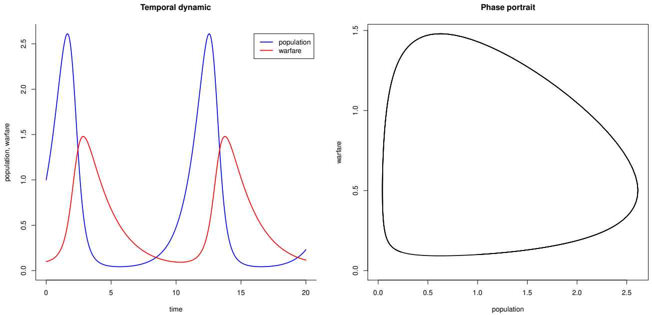
Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aWN - bW\end{aligned}$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN - \delta WN$$
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = aWN - bW$$



Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace zpsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný jeho intenzitě i velikosti populace

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN - \delta WN$$
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = aWN - bW$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace zpsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný pravděpodobnosti setkání nepřátelských skupin

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= a \qquad - bW
\end{aligned}
$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Předpoklady:

- relativní přírůstek velikosti populace (přirozený) je konstantní
- relativní úbytek populace zpsobený válkou je úměrný intenzitě válčení
- úbytek válčení je úměrný jeho intenzitě
  (válčení má „setrvačnost“, příčinou boje je msta)
- přírůstek válčení je úměrný pravděpodobnosti setkání nepřátelských skupin

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW\end{aligned}$$

Války v prvobytných společnostech

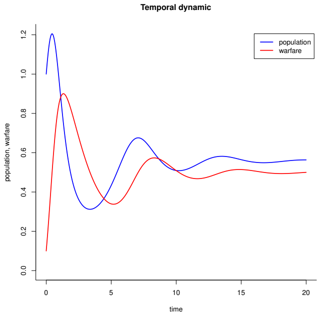
Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

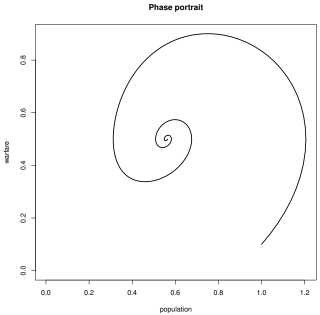
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW \end{aligned}$$

Války v prvobytných společnostech

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta WN\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW\end{aligned}$$





Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW\end{aligned}$$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW\end{aligned}$$

- stát zmenšuje intenzitu válčení

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- stát zmenšuje intenzitu válčení

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- pracující člověk vytváří přebytek: $\varrho = \varrho(N)$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S \end{aligned}$$

- pracující člověk vytváří přebytek: $\varrho = \varrho(N)$
  výběr daní je úměrný vyprodukovanému přebytku

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= c_1 N\varrho(N)\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- pracující člověk vytváří přebytek: $\varrho = \varrho(N)$
  výběr daní je úměrný vyprodukovanému přebytku

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= c_1 N\varrho(N)\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- pracující člověk vytváří přebytek: $\varrho = \varrho(N)$
  výběr daní je úměrný vyprodukovanému přebytku
  zákon klesajících výnosů (Ricardo): $\varrho(N) = c_2\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$
  K – velikost poulace, při níž je přebytek nulový; kapacita státu

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N\left(1 - \frac{N}{K}\right)\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- pracující člověk vytváří přebytek: $\varrho = \varrho(N)$
  výběr daní je úměrný vyprodukovanému přebytku
  zákon klesajících výnosů (Ricardo): $\varrho(N) = c_2\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$
  K – velikost poulace, při níž je přebytek nulový; kapacita státu
  $\varrho_0 = c_1 c_2$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S
\end{aligned}
$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta N \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S
\end{aligned}
$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN - \delta NW\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N\left(1-\frac{N}{K}\right) - \beta N\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení
- růst populace je úměrný vyprodukovanému přebytku

$$r = c_3\varrho(N) = c_3 c_2\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r_0 N\left(1-\frac{N}{K}\right) - \delta N W\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N\left(1-\frac{N}{K}\right) - \beta N\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S\end{aligned}$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení
- růst populace je úměrný vyprodukovanému přebytku

$$r = c_3\varrho(N) = c_3c_2\left(1-\frac{N}{K}\right), \ \varrho_0 = c_3c_2$$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \delta N W \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta N \\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S \end{aligned}$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení
- růst populace je úměrný vyprodukovanému přebytku
  $$r = c_3 \varrho(N) = c_3 c_2 \left(1 - \frac{N}{K}\right), \ \varrho_0 = c_3 c_2$$
- kapacita státu je zmenšována válkami, $K = k_{\max} - cW$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r_0 N\left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \delta NW \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N\left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \beta N \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S
\end{aligned}$$

- náklady státu jsou úměrné osídlení
- růst populace je úměrný vyprodukovanému přebytku

$$r = c_3 \varrho(N) = c_3 c_2 \left(1 - \frac{N}{K}\right), \ \varrho_0 = c_3 c_2$$

- kapacita státu je zmenšována válkami, $K = k_{\max} - cW$

Války v agrárních impériích

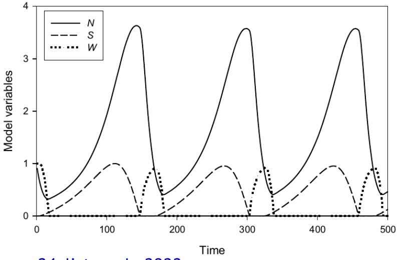
Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r_0 N \left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \delta N W \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N \left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \beta N \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= aN^2 - bW - \alpha S
\end{aligned}$$

Války v agrárních impériích

Stavové veličiny: $N = N(t)$ – velikost populace (osídlení)
$S = S(t)$ – zdroje státu
$W = W(t)$ – intenzita válčení

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= r_0 N \left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \delta N W \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \varrho_0 N \left(1 - \frac{N}{k_{\max} - cW}\right) - \beta N \\
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= a N^2 - bW - \alpha S
\end{aligned}
$$



Války v agrárních impériích

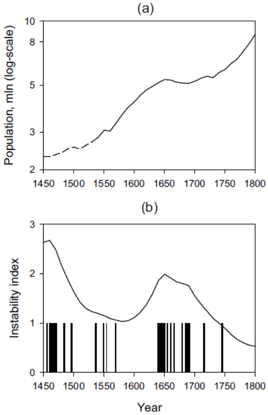


Fig. 7

(a) Population of England, 1450–1800. The broken line indicates less accurately measured data prior to 1540.

(b) Sociopolitical instability in England, 1450-1800. Bars: years in civil war or rebellion. Curve: yearly data smoothed by an exponential kernel with bandwidth of 50 y.

Index nestability $= W - S$.

Války v agrárních impériích

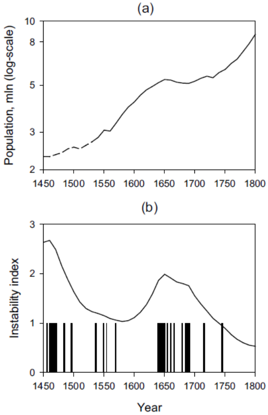
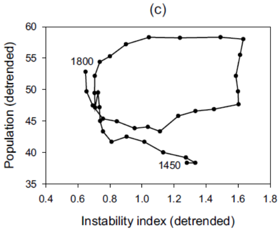


Fig. 7

(a) Population of England, 1450–1800. The broken line indicates less accurately measured data prior to 1540.

(b) Sociopolitical instability in England, 1450-1800. Bars: years in civil war or rebellion. Curve: yearly data smoothed by an exponential kernel with bandwidth of 50 y.



(c) Phase plot (both population and instability are detrended).

Index nestability $= W - S$.

Semidynamický systém:

- Neprázdná množina X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Semidynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq [0, \infty)$

  (1) $0 \in J, 1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $s, t \in J,\ s < t, \quad \Rightarrow \quad t - s \in J$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Dynamický systém:

- Metrický prostor X
- Časová množina $J \subseteq \mathbb{R}$

  (1) $0 \in J$, $1 \in J$
  (2) $s, t \in J \quad \Rightarrow \quad s + t \in J$
  (3) $(J, +)$ je podgrupa $(\mathbb{R}, +)$

- Evoluční operátor $\Phi : J \times X \to X$

  (i) $\Phi(0, x) = x$ pro každé $x \in X$
  (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$ pro všechna $t, s \in J$ a každé $x \in X$

Systém *se spojitými stavy:* $\Phi(t, \cdot\,) : X \to X$ je spojité pro každé $t \in J$
spojitý v čase: $\Phi(\,\cdot\,, x) : J \to X$ je spojitá funkce pro každé $x \in X$
spojitý: Φ je spojité vzhledem k součinové topologii na $J \times X$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) - \text{uhynulí} + \text{narození}$$
$$x(t+1) = x(t) - dx(t) + bx(t) = (1-d+b)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 - d + b$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost
$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

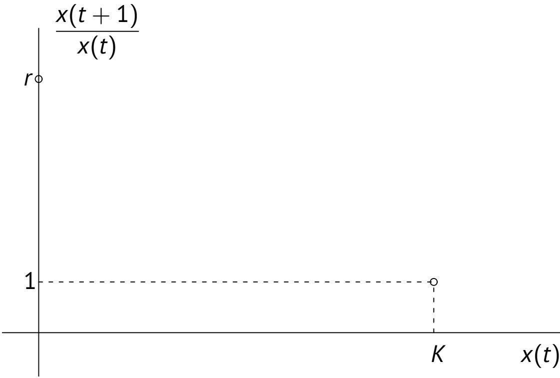
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

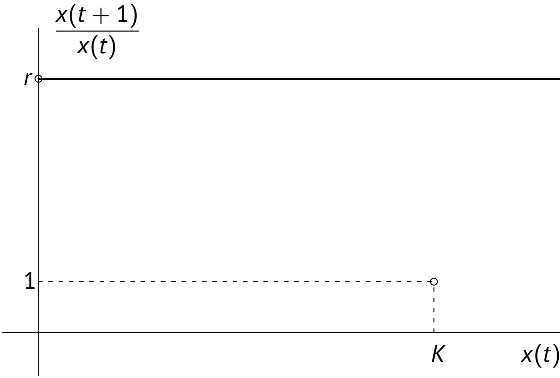
$$r = r\big(x(t)\big)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

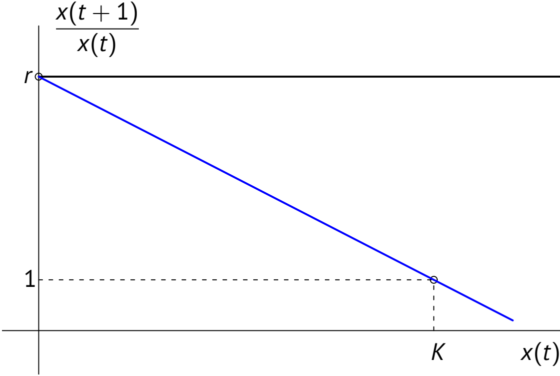
Euler, Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

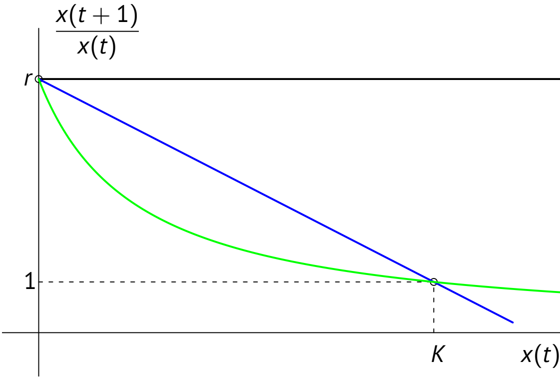
$$x(t+1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$$

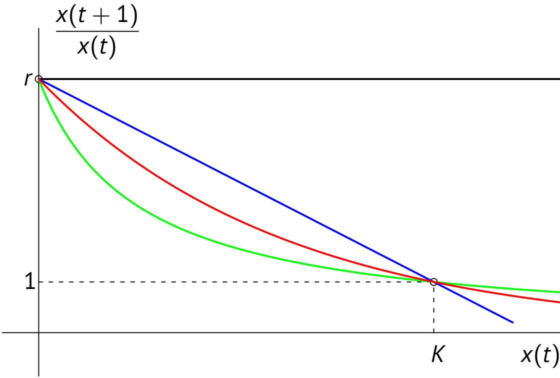


Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$x(t+1) = rx(t)$

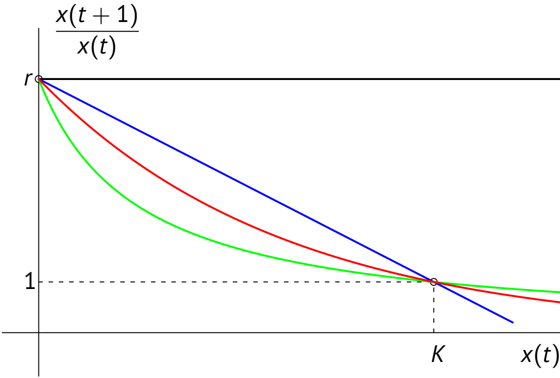
$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

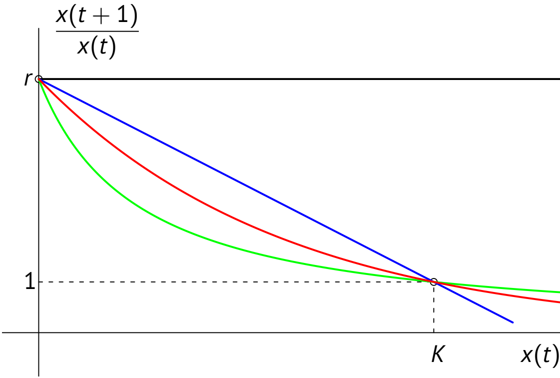
Maynard Smith, May

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

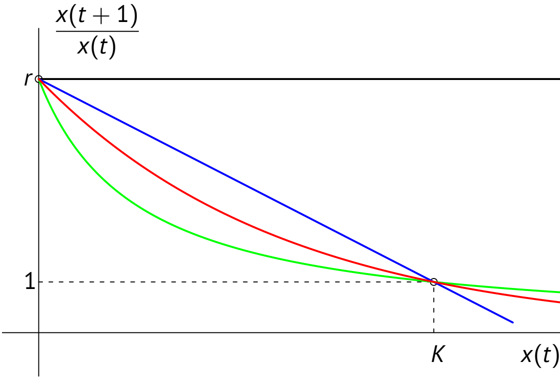
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

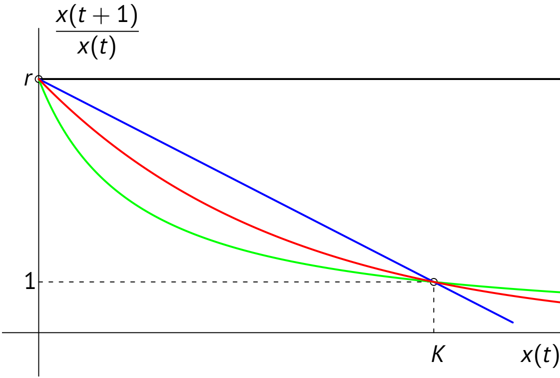
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\dfrac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

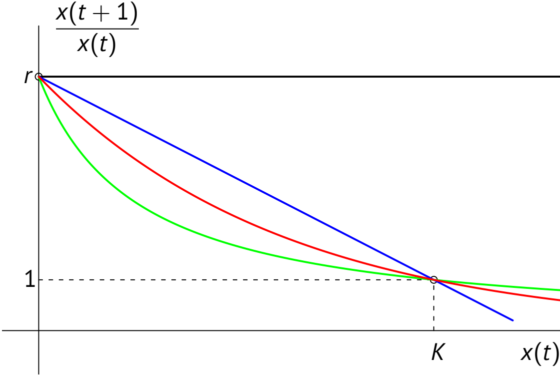
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$



Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Euler, Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May

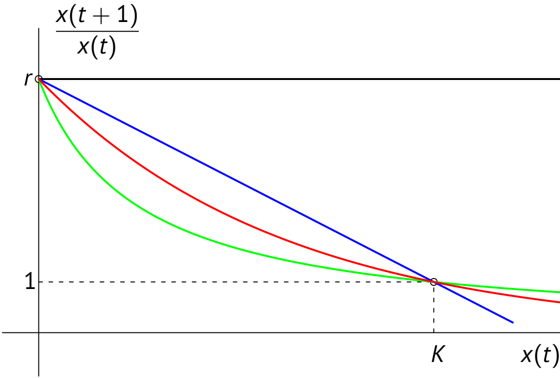
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Pielou, Beverton-Holt:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$

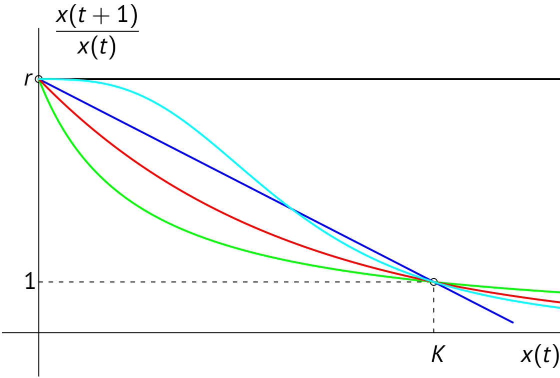


Ricker:

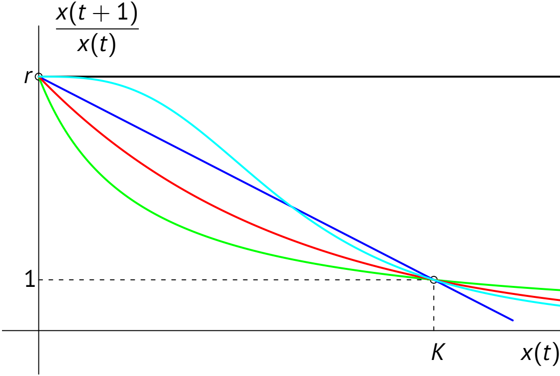
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

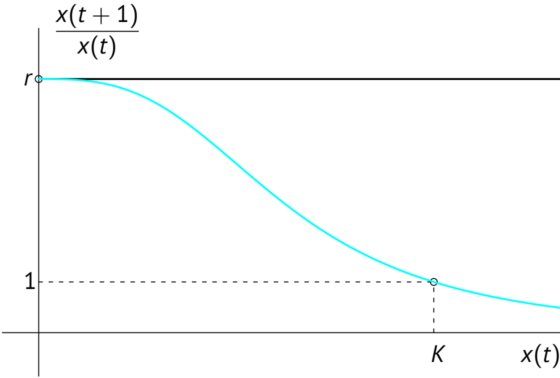


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1+(r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)x(t+1)$$

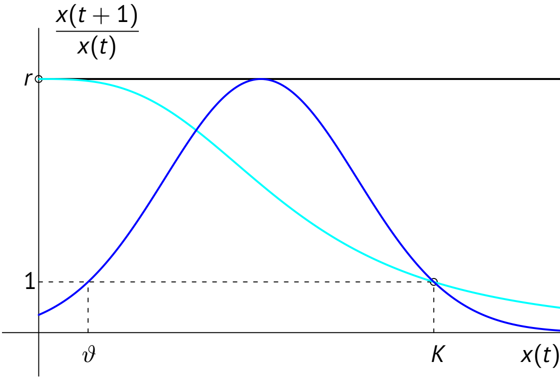
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\left(\frac{x(t-1)}{K}\right)^{\beta}}x(t)$$

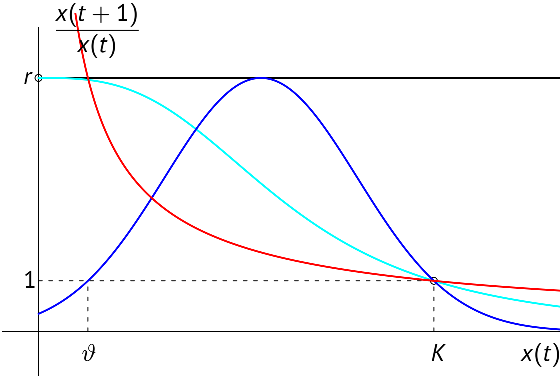
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)}x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



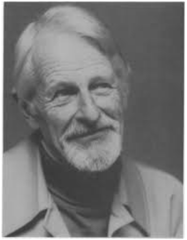
Gompertz:

$$x(t+1) = \left(rx(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}} \right) x(t)$$

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

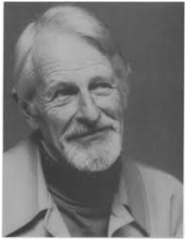
Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

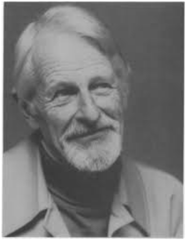


Richard M. Goodwin,
1913–1996

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

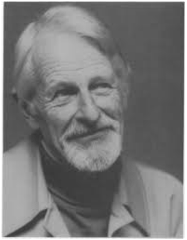
- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

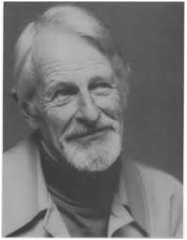
- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

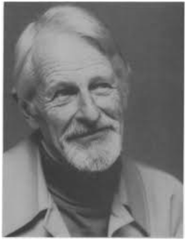
Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v) \quad \text{Phillipsova křivka}$$

Třídní boj

Goodwin

R.M. Goodwin: A Growth cycle. in C.H. Feinstein (ed.): *Socialism, Capitalism & Economic Growth.* Cambridge Univ. Press, 1967



Richard M. Goodwin, 1913–1996

Předpoklady:

- Veškerá čistá produkce je investována.
- Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.
- Projevuje se stálý rovnoměrný pokrok.
  Relativní přírůstek produktivity je konstantní α.
- Mzdová sazba závisí na zaměstananosti.

Y	produkce
L	práce (počet pracujících)
W	mzda
N	počet obyvatelstva
$v = v(t) = \dfrac{L}{N}$	zaměstnanost
$u = u(t) = \dfrac{WL}{Y}$	podíl mzdy na produkci

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v) \quad \text{Phillipsova křivka}$$

$$\begin{aligned} u' &= u\big(\varphi(v) - \alpha\big) \\ v' &= v(\gamma - \sigma u) \end{aligned}$$

MASARYKOVA
UNIVERZITA