Nejistota: Pravděpodobnost, teorie her

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

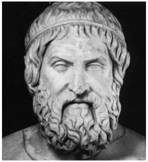
Masarykova univerzita

27. října 2022

Obsah

Antické drama

Náhoda slouží osudu

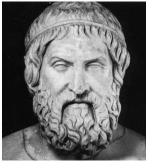


Sofokles

497/6–406/5 BCE

Antické drama

Náhoda slouží osudu



Sofokles

497/6–406/5 BCE

Korespondence Pascala s Fermatem

Řešení úloh o hodu kostkami

Blaise Pascal

1623–1662

Pierre de Fermat

1607–1665

Korespondence Pascala s Fermatem

Blaise Pascal

1623–1662

Pierre de Fermat

1607–1665

Řešení úloh o hodu kostkami

Christian Huygens: De Ratiociniis in Ludo Aleæ

Christian Huygens

1629–1695

Výhra ve hře – náhodná veličina

Christian Huygens: De Ratiociniis in Ludo Aleæ

Christian Huygens

1629–1695

Výhra ve hře – náhodná veličina

Jacob Bernoulli: Ars Conjectandi

Jacob I Bernoulli

1654–1705

Systematické budování teorie

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}, \text{ztráta}, \text{hrana}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
Čekání na úspěch	$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Čekání na úspěch	$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$
Čekání na tramvaj	$\Omega = \{x : 0 \leq x \leq \text{délka časového intervalu}\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Čekání na úspěch	$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$
Čekání na tramvaj	$\Omega = \{x :\ 0 \leq x \leq \text{délka časového intervalu}\}$
Zjišťování teploty varu vody	$\Omega = \{x :\ 70 \leq x \leq 105\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{\text{♀}, \text{♂}\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Čekání na úspěch	$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$
Čekání na tramvaj	$\Omega = \{x : 0 \leq x \leq \text{délka časového intervalu}\}$
Zjišťování teploty varu vody	$\Omega = \{x : 70 \leq x \leq 105\}$
Střelba do terče	$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

Základní pojmy

Náhodný pokus a jeho výsledky

Náhodný pokus: jakákoliv akce, která může dát různé rozpoznatelné a nezaměnitelné výsledky; před provedením pokusu není jeho výsledek znám.
Základní prostor možných výsledků: $\Omega \neq \emptyset$, souhrn všech možných výsledků náhodného pokusu.

Příklady:

Hod mincí	$\Omega = \{\text{avers}, \text{revers}\}$
Zplození dítěte	$\Omega = \{♀, ♂\}$
Ranní probuzení	$\Omega = \{\text{Slunce vyjde}, \text{Slunce nevyjde}\}$
Hod kostkou	$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Čekání na úspěch	$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 000001, \dots\}$
Čekání na tramvaj	$\Omega = \{x : 0 \leq x \leq \text{délka časového intervalu}\}$
Zjišťování teploty varu vody	$\Omega = \{x : 70 \leq x \leq 105\}$
Střelba do terče	$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$
Fotbalový zápas	$\Omega = \{\text{výhra, remíza, prohra}\}$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev $\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok $\quad A = \{⚁, ⚃, ⚅\}$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok $\qquad A = \{$⚂, ⚃, ⚅$\}$

Padne lichý počet ok

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{\text{⚀}, \text{⚂}, \text{⚄}\}$
Padne aspoň tři	$C = \{\text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev $\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{\text{⚀}, \text{⚂}, \text{⚄}\}$
Padne aspoň tři	$C = \{\text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}$
Padne lichý počet menší než tři	

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A =$ {⚁, ⚃, ⚅}
Padne lichý počet ok	$B =$ {⚀, ⚂, ⚄}
Padne aspoň tři	$C =$ {⚂, ⚃, ⚄, ⚅}
Padne lichý počet menší než tři	$D =$ {⚀}

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev $\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{⚁, ⚃, ⚅\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{⚀, ⚂, ⚄\}$
Padne aspoň tři	$C = \{⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{⚀\}$
Padne kladný počet ok	

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý: $E = \Omega$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{\epsdice{2}, \epsdice{4}, \epsdice{6}\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{\epsdice{1}, \epsdice{3}, \epsdice{5}\}$
Padne aspoň tři	$C = \{\epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{\epsdice{1}\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý:	$E = \Omega$
Jev nemožný:	$F = \emptyset$

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{\text{⚀}, \text{⚂}, \text{⚄}\}$
Padne aspoň tři	$C = \{\text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{\text{⚀}\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý:	$E = \Omega$
Jev nemožný:	$F = \emptyset$
Jevy slučitelné:	A a C, B a C, B a D, E a cokoliv s výjimkou F

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý:	$E = \Omega$
Jev nemožný:	$F = \emptyset$
Jevy slučitelné:	A a C, B a C, B a D, E a cokoliv s výjimkou F
Jevy neslučitelné:	A a B, A a D, C a D, F a cokoliv

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{$⚁, ⚃, ⚅$\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$
Padne aspoň tři	$C = \{$⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{$⚀$\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý:	$E = \Omega$
Jev nemožný:	$F = \emptyset$
Jevy slučitelné:	A a C, B a C, B a D, E a cokoliv s výjimkou F
Jevy neslučitelné:	A a B, A a D, C a D, F a cokoliv
Jevy komplementární:	A a B, E a F

Základní pojmy

Náhodný jev

Rozpoznatelná část základního prostoru; náhodný jev$\subseteq \Omega$

Příklad – hod kostkou:

Padne sudý počet ok	$A = \{\epsdice{2}, \epsdice{4}, \epsdice{6}\}$
Padne lichý počet ok	$B = \{\epsdice{1}, \epsdice{3}, \epsdice{5}\}$
Padne aspoň tři	$C = \{\epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}$
Padne lichý počet menší než tři	$D = \{\epsdice{1}\}$
Padne kladný počet ok	$E = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\} = \Omega$
Padne počet dělitelný sedmi	$F = \{\} = \emptyset$

Jev jistý:	$E = \Omega$
Jev nemožný:	$F = \emptyset$
Jevy slučitelné:	A a C, B a C, B a D, E a cokoliv s výjimkou F
Jevy neslučitelné:	A a B, A a D, C a D, F a cokoliv
Jevy komplementární:	A a B, E a F; $A \cup B = \Omega$, $B = \Omega \setminus A$

Definice pravděpodobnosti

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

Definice pravděpodobnosti

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathrm{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Definice pravděpodobnosti

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathrm{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.

Definice pravděpodobnosti

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathrm{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Příklad: V roce 1970 se v ČSSR narodilo 228 531 dětí, v tom 111 394 děvčat a zbytek chlapců.
Jevy: A – narození děvčete, B – narození chlapce. Jsou komplementární.

$$n = 228\,531, \; f_A = 111\,394, \; f_B = 228\,531 - 111\,394 = 117\,137$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{111\,394}{228\,531} \doteq 0{,}4874, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{117\,137}{228\,531} \doteq 0{,}5126$$

Definice pravděpodobnosti

Empirická pravděpodobnost

Náhodný pokus mnohokrát opakujeme, zaznamenáme počet výskytů jevu

n – počet opakování pokusu, $n > 0$
f_A – počet výskytu (absolutní frekvence) jevu A

$$\mathrm{P}(A) = \frac{f_A}{n},$$

tj. relativní frekvence jevu A

Vlastnosti empirické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{f_A + f_B}{n} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

Definice pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Definice pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklad:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

Definice pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Příklad:
Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne méně než tři oka?

$$\Omega = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}, \quad |\Omega| = 6,$$
$$A = \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad |A| = 2,$$
$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} \doteq 0{,}333$$

Definice pravděpodobnosti

Klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina, všechny výsledky jsou stejně možné

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Vlastnosti klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega) > 0$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklad:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega \in \Omega} w(\omega)}$$

Příklad:
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi padnou obě na stejnou stranu?

$$\Omega = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{avers}, \text{revers}), (\text{revers}, \text{revers})\},$$

$$w(\text{avers}, \text{avers}) = w(\text{revers}, \text{revers}) = 1, \quad w(\text{avers}, \text{revers}) = 2,$$

$$A = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{revers}, \text{revers})\}$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1+1}{1+2+1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná klasická pravděpodobnost

Základní prostor je neprázdná konečná množina,
každému prvku $\omega \in \Omega$ je přiřazena váha $w(\omega) \geq 0$, $\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega) > 0$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\sum\limits_{\omega\in A} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)}$$

Vlastnosti zobecněné klasické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{\sum\limits_{\omega\in A} w(\omega) + \sum\limits_{\omega\in B} w(\omega)}{\sum\limits_{\omega\in\Omega} w(\omega)} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

Definice pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Definice pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Definice pravděpodobnosti

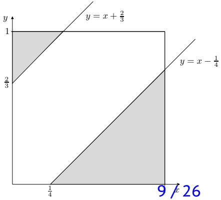
Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Příklad:
On a Ona se domluví, že se sejdou na určeném místě mezi 13. a 14. hodinou. On po příchodu čeká 40 minut, Ona 15 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se nesetkají?

Označení: x …čas, kdy přišel On, y … čas, kdy přišla Ona



$$\Omega = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}, \quad \mu(\Omega) = 1,$$
$$A = \left\{(x,y) \in \Omega:\ y > x + \tfrac{2}{3} \text{ nebo } y < x - \tfrac{1}{4}\right\},$$
$$\mu(A) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{9}{32} + \tfrac{1}{18} \doteq 0{,}3368,$$
$$\mathrm{P}(A) \doteq 0{,}3368$$

Definice pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu".

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Vlastnosti geometrické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu".
V každém bodu $x \in \Omega$ je definována hustota $\varrho(x)$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.
V každém bodu $x \in \Omega$ je definována hustota $\varrho(x)$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\int\limits_A \varrho(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_\Omega \varrho(x)\mathrm{d}x}$$

Definice pravděpodobnosti

Zobecněná geometrická pravděpodobnost

Základní prostor je nějaký geometrický útvar, který má míru μ (délku, obsah, objem a podobně).
Jev – část základního prostoru, který má míru „stejného druhu“.
V každém bodu $x \in \Omega$ je definována hustota $\varrho(x)$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\int\limits_A \varrho(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_\Omega \varrho(x)\mathrm{d}x}$$

Vlastnosti zobecněné geometrické pravděpodobnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A)$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{\int\limits_\Omega \varrho(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_\Omega \varrho(x)\mathrm{d}x} = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

$A_\iota \in \mathcal{A}$ pro $\iota \in I \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N},\; A_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N},\; A_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Pro jevy platí:

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N},\ A_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \ \Rightarrow \ \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor

$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N},\ A_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \ \Rightarrow \ \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$\Omega \in \mathcal{A}$
$A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
$A_\iota \in \mathcal{A}$ pro $\iota \in I \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$P(\Omega) = 1$
$A_\iota \in \mathcal{A}$ pro $\iota \in I \subseteq \mathbb{N},\ A_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j \ \Rightarrow \ \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A \cap B \in \mathcal{A}$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

$\Omega \neq \emptyset$ – základní prostor
$\mathcal{A}$ – množina jevů, tj. množina podmnožin Ω, která má vlastnosti

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \mathcal{A}$$

Pravděpodobnost: $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$, tj. přiřazení nezáporného čísla jevu.
Přitom platí:

$$P(\Omega) = 1$$
$$A_\iota \in \mathcal{A} \text{ pro } \iota \in I \subseteq \mathbb{N},\; A_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

Pro jevy platí:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$

  D.: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$

  D.: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

Definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

Vlastnosti

$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow\ \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
  D.: $\Omega = \Omega \cup \emptyset, \Omega \cap \emptyset = \emptyset \ \Rightarrow 1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega) + \mathrm{P}(\emptyset) = 1 + \mathrm{P}(\emptyset) \ \Rightarrow \mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$
  D.: $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\big(A \cup (\Omega \setminus A)\big) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\Omega \setminus A)$
- $\mathrm{P}(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \ \Rightarrow\ \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$
  D.: $B = A \cup (B \setminus A), A \cap (B \setminus A) = \emptyset \ \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ – princip inkluze a exkluze
  D.: $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cup B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$, jevy vzájemně neslučitelné $\Rightarrow$
  $$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}\big(B \setminus (A \cap B)\big) =$$
  $$= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B)$$
- $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$

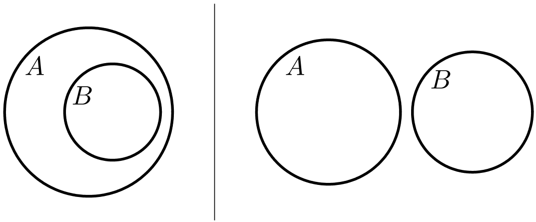
Deterministická závislost

Jevy A a B jsou (deterministicky) závislé, pokud

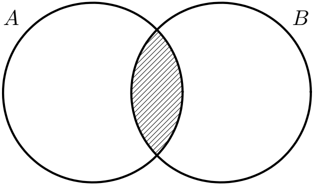
$$A \subseteq B, \text{ nebo } B \subseteq A \text{ nebo } A \cap B = \emptyset$$

$B \subseteq A$ – pokud nastane jev B, víme, že také nastane jev A

$A \cap B = \emptyset$ – pokud nastane jev A, víme, že určitě nenastane jev B

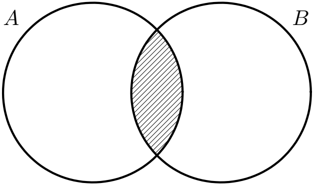


Stochastická nezávislost



Stochastická nezávislost

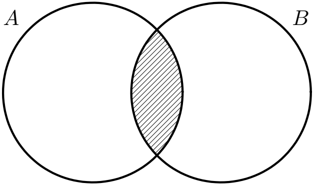
Motivace: Házíme dvěma různými mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne líc?



Stochastická nezávislost

Motivace: Házíme dvěma různými mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne líc?

Hod jednou mincí:
$p_1 = \mathrm{P}(\text{na první minci padne avers}) = \frac{1}{2}$,
$p_2 = \mathrm{P}(\text{na druhé minci padne avers}) = \frac{1}{2}$

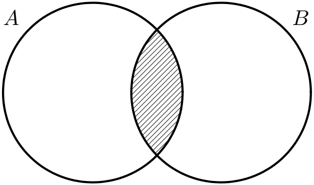


Stochastická nezávislost

Motivace: Házíme dvěma různými mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne líc?

Hod jednou mincí:
$p_1 = \mathrm{P}(\text{na první minci padne avers}) = \frac{1}{2}$,
$p_2 = \mathrm{P}(\text{na druhé minci padne avers}) = \frac{1}{2}$

Hod oběma mincemi:
$\Omega = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{avers}, \text{revers}), (\text{revers}, \text{avers}), (\text{revers}, \text{revers})\}$
$\mathrm{P}(\text{avers}, \text{avers}) = \frac{1}{4}$

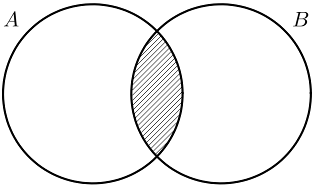


Stochastická nezávislost

Motivace: Házíme dvěma různými mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne líc?

Hod jednou mincí:
$p_1 = \mathrm{P}(\text{na první minci padne avers}) = \frac{1}{2}$,
$p_2 = \mathrm{P}(\text{na druhé minci padne avers}) = \frac{1}{2}$

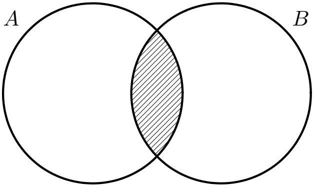
Hod oběma mincemi:
$\Omega = \{(\text{avers}, \text{avers}), (\text{avers}, \text{revers}), (\text{revers}, \text{avers}), (\text{revers}, \text{revers})\}$
$\mathrm{P}(\text{avers}, \text{avers}) = \frac{1}{4} = p_1 p_2$



Stochastická nezávislost

Jevy A a B jsou (stochasticky) nezávislé, pokud

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

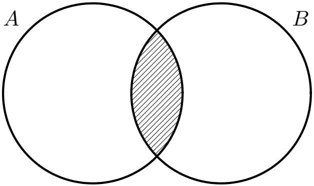


Stochastická nezávislost

Jevy A a B jsou (stochasticky) nezávislé, pokud

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

Pokud nastane (nenastane) jev A, pravděpodobnost jevu B se nezmění



Stochastická nezávislost

Empirické ověření

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

Stochastická nezávislost

Empirické ověření

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m_1}{N}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{n_1}{N}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{p_{11}}{N}$$

Stochastická nezávislost

Empirické ověření

	A	$\Omega \setminus A$	
B	p_{11}	p_{12}	$n_1 = p_{11} + p_{12}$
$\Omega \setminus B$	p_{21}	p_{22}	$n_2 = p_{21} + p_{22}$
	$m_1 = p_{11} + p_{21}$	$m_2 = p_{12} + p_{22}$	$N = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m_1}{N}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{n_1}{N}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{p_{11}}{N}$$

Pokud se hodnoty $\dfrac{m_1 n_1}{N^2}$ a $\dfrac{p_{11}}{N}$ „příliš neliší“, tj. pokud $m_1 n_1 \approx N p_{11}$, pak považujeme jevy A a B za stochasticky nezávislé.

Stochastická nezávislost

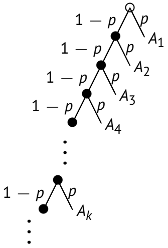
Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

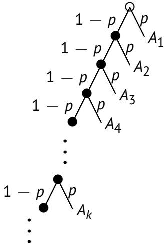


Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathrm{P}(A_1) = p$

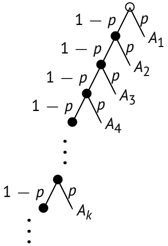


Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$P(A_1) = p$
$P(A_2) = (1-p)p$

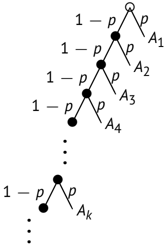


Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$$\mathrm{P}(A_1) = p$$
$$\mathrm{P}(A_2) = (1-p)p$$
$$\mathrm{P}(A_3) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$$

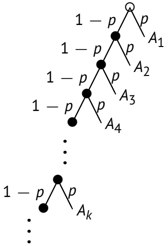


Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$P(A_1) = p$
$P(A_2) = (1-p)p$
$P(A_3) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$
$P(A_4) = (1-p)^3 p$

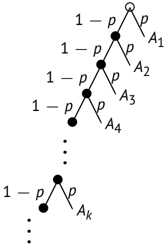


Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1) &= p \\
\mathrm{P}(A_2) &= (1-p)p \\
\mathrm{P}(A_3) &= (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p \\
\mathrm{P}(A_4) &= (1-p)^3 p \\
&\vdots \\
\mathrm{P}(A_k) &= (1-p)^{k-1} p
\end{aligned}
$$



Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathrm{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathrm{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné.

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathrm{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné. Proto

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p$$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
a) Pokus opakujeme tak dlouho, až nastane úspěch. Jaká je pravděpodobnost jevu A_k, že pokus budeme opakovat k-krát?

$\mathrm{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$

Jevy A_k jsou vzájemně neslučitelné. Proto

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\,\frac{1}{1-(1-p)}$$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Pravděpodobnost k úspěchů a $n-k$ neúspěchů: $p^k(1-p)^{n-k}$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

Pravděpodobnost k úspěchů a $n-k$ neúspěchů: $p^k(1-p)^{n-k}$

Celkem: $\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$$\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$.

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Proto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Proto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Stochastická nezávislost

Příklad: čekání na úspěch

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.

b) Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

$\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pro různé hodnoty k a pevně zvolenou hodnotu n jsou jevy B_n^k neslučitelné, $B_n^{k_1} \cap B_n^{k_2} = \emptyset$ pro $k_1 \neq k_2$. Proto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1^n$$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathrm{P}(A|H)$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathrm{P}(A|H)$

$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathrm{P}(A|H)$

$$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \\ = \frac{\mathrm{P}\big((A\cup B)\cap H\big)}{\mathrm{P}(H)} = \frac{\mathrm{P}\big((A\cap H)\cup(B\cap H)\big)}{\mathrm{P}(H)} = \frac{\mathrm{P}(A\cap H)+\mathrm{P}(B\cap H)}{\mathrm{P}(H)} = \\ = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H)$$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathrm{P}(A|H)$

$$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H)$$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:

$$0 \leq \mathrm{P}(A|H)$$
$$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H)$$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:
$$0 \leq \mathrm{P}(A|H)$$
$$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H)$$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A|B) = \tfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \tfrac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)\\
& \quad \mathrm{P}(B|A) = \tfrac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \tfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B)\\
\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A) \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\
\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B) \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)
\end{aligned}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti:
$$\begin{aligned} & 0 \leq \mathrm{P}(A|H) \\ & \mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1 \\ & A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H) \end{aligned}$$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \\ & \quad\quad\; \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A) \end{aligned}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Definice a vlastnosti

Pravděpodobnost jevu A za podmínky (předpokladu), že nastal jev H:

$$\mathrm{P}(A|H) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)}{\mathrm{P}(H)}$$

Předpokládáme, že $\mathrm{P}(H) > 0$.

Vlastnosti: $0 \leq \mathrm{P}(A|H)$

$\mathrm{P}(\Omega|H) = \mathrm{P}(H|H) = 1$

$A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathrm{P}(A \cup B|H) = \mathrm{P}(A|H) + \mathrm{P}(B|H)$

Tedy: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \\
& \quad \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)
\end{aligned}$$

Tedy: Jevy A a B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ a $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$.

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(B)$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \tfrac{1}{36}$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\left(\mathrm{P}(B)\right)^n = \qquad \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \left(\mathrm{P}(B)\right)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \left(\mathrm{P}(B)\right)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

$$n > \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{35}{36}} \doteq 24{,}61$$

Úlohy rytíře de Méré

Hod dvojicí kostek

Hází se dvojicí kostek. Pro jaké n je vhodné vsadit na to, že nejpozději v n-tém hodu padne součet 12?

n – počet hodů,
A – jev: součet 12 alespoň jednou padne,
B – jev: součet 12 v jednom hodu nepadne.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \big(\mathrm{P}(B)\big)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n > \tfrac{1}{2}$$

$$n > \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{35}{36}} \doteq 24{,}61$$

Počet hodů by měl být aspoň 25.

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅,⚅\} \text{ padlo,} \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅, ⚅\} \text{ padlo,} \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne $\{⚅, ⚅\}$

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{⚅,⚅\} \text{ padlo,} \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne {⚅,⚅} ,

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^{n-m}.$$

Úlohy rytíře de Méré

Spravedlivé rozdělení sázky

Hra je v nějakém okamžiku – po m hodech – přerušena. Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit bank. Přitom první hráč vsadil na to, že součet 12 padne, druhý na to, že nepadne.

b – množství peněz v banku,
V – částka pro prvního hráče,

$$V = \begin{cases} b, & \text{pokud } \{\text{⚅}, \text{⚅}\} \text{ padlo}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

C – jev: ve zbývajících $n - m$ hodech padne {⚅,⚅} ,

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^{n-m}.$$

Očekávaná částka pro prvního hráče:

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(C)b$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

,

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě" – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal}, \\ -c, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě" – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal,} \\ -c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Očekávaná výhra

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(A)(d-c) + \big(1 - P(A)\big)(-c)$$

Očekávaná výhra

„Hra proti přírodě“ – výsledek závisí na náhodě.

c – vklad do hry,
A – náhodný jev,

V – výhra:

$$V = \begin{cases} d - c, & \text{jev } A \text{ nastal,} \\ -c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

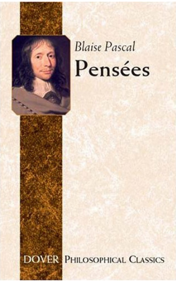
Očekávaná výhra

$$\mathrm{E}V = \mathrm{P}(A)(d-c) + \big(1 - P(A)\big)(-c) = d\mathrm{P}(A) - c.$$

Je-li $\mathrm{E}V > 0$, je výhodné vsadit c.

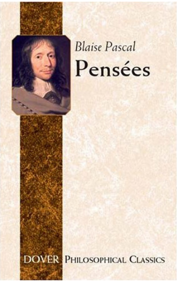
Očekávaná výhra

Pascalova sázka



Očekávaná výhra

Pascalova sázka

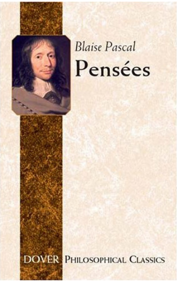


„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



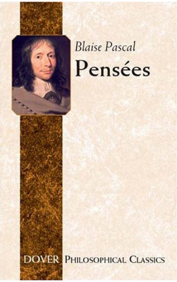
„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

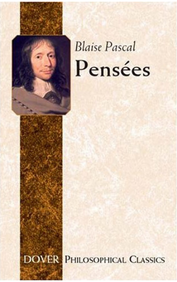
Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Předpoklady: $\mathrm{P}(A) > 0$, $d = \infty$

Očekávaná výhra

Pascalova sázka



„Bůh jest, nebo není. Ale kam se nakloníme? Rozum tu nedovede nic rozhodnouti: je nekonečný chaos, který nás rozdvojuje. Hra se hraje v nejzazší krajnosti této nekonečné vzdálenosti, kde vyjde hlava nebo orel. Oč se sadíte? Rozumně nemůžete učiniti jedno ani druhé; rozumně nemůžete hájiti z obojího nic.“

Pascal, Myšlenky, 233

A – Bůh existuje,
c – praktikované náboženství, mravný život,
d – věčný život.

Předpoklady: $\mathrm{P}(A) > 0$, $d = \infty$

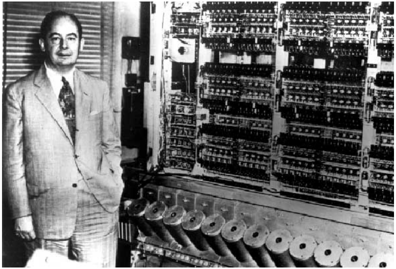
$$\mathrm{E}V = \infty \cdot \mathrm{P}(A) - c = \infty > 0$$

Hra

Hra dvou hráčů v normálním tvaru:
čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Množina X,resp. Y ...*množina strategií prvního, resp druhého, hráče*.

Funkce u, resp. v...*výplatní funkce prvního, resp. druhého, hráče*.



Hra

Bimaticová hra

Nechť

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \quad Y = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \quad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hra

Bimaticová hra

Nechť

$$X = \{1, 2, \dots, n\} \qquad Y = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_{ij} = u(i, j) \qquad b_{ji} = v(i, j)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

S tímto označením dostaneme

$$u(i, j) = a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = b_{ji} = \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} \mathrm{B} \boldsymbol{e}_i.$$

Matice A, B …*výplatní matice*.

$$\mathcal{G} = (X, Y, u, v) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

Hra

Bimaticová hra

Hru lze vyjádřit tabulkou

		hráč 2			
		1	2	$\dots$	m
hráč 1	1	b_{11} a_{11}	b_{21} a_{12}	$\dots$	b_{m1} a_{1m}
	2	b_{12} a_{21}	b_{22} a_{22}	$\dots$	b_{m2} a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	b_{1n} a_{n1}	b_{2n} a_{n2}	$\dots$	b_{mn} a_{nm}

Hra

Bimaticová hra

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

X, Y … čisté strategie

X^*, Y^* … smíšené strategie

Hra

Bimaticová hra

Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$:

čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$;

$X^* = S_n$, $Y^* = S_m$,
u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{x}.$$

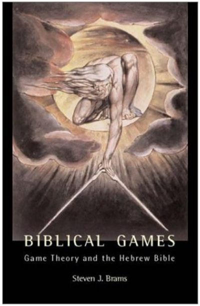
X, Y … čisté strategie

X^*, Y^* … smíšené strategie

$\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*) = (\mathsf{A}, \mathsf{B})$

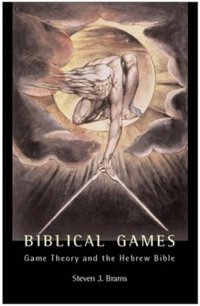
Populární hry

„Víra a zjevení"



Populární hry

„Víra a zjevení“



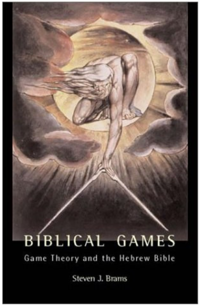
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří		
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

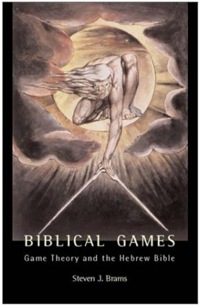
„Víra a zjevení“

Bůh

člověk		zjevuje se	je skrytý
	věří		4
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



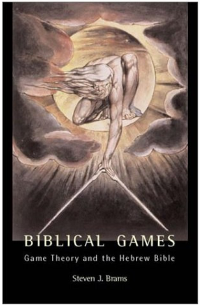
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří		

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

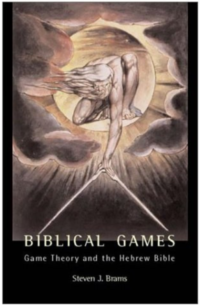
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří		2

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



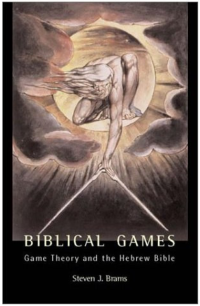
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3	4
	nevěří	1	2

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

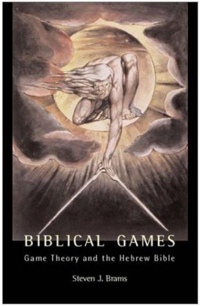
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4
	nevěří	1	2

Preference:

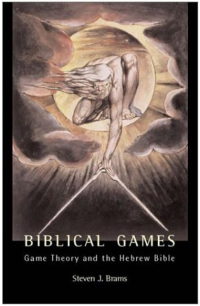
	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4
	nevěří	1	2 3



Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit

Populární hry

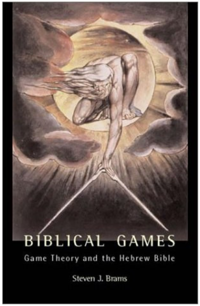
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1	2 3

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Populární hry

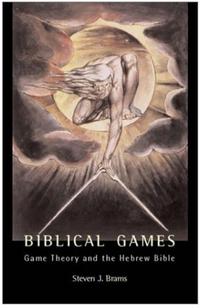
„Víra a zjevení“

Bůh

		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1 1	2 3

Preference:

	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



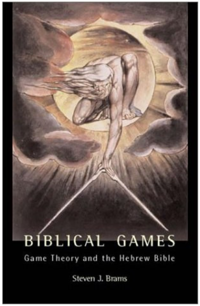
Populární hry

„Víra a zjevení“

		Bůh	
		zjevuje se	je skrytý
člověk	věří	3 4	4 2
	nevěří	1 1	2 3

Preference:

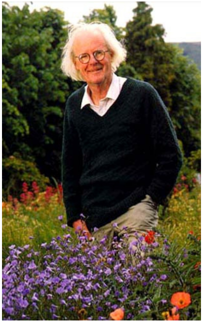
	Bůh	člověk
1	aby člověk věřil	vědět
2	zůstat skrytý	věřit



Z předpokladu, že se Bůh chová racionálně, plyne, že člověk udělá nejlépe, když v tohoto Boha nebude věřit.

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

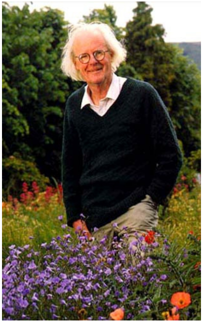


John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb		
holubice		



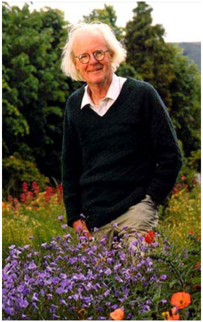
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb		
holubice		

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



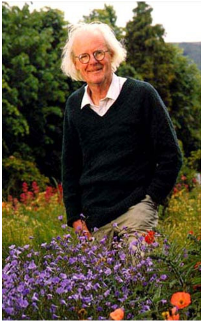
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	
holubice		

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt

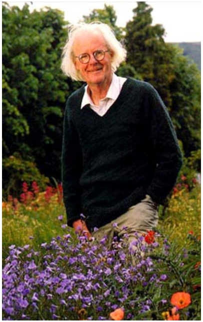


John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry
„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	
holubice		$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



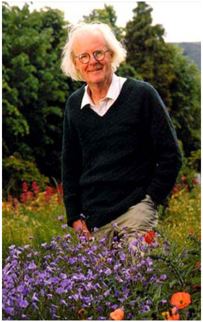
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
holubice		$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



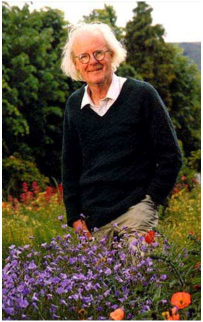
John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

„Jestřábi a holubice“

	jestřáb	holubice
jestřáb	$\frac{1}{2}V - C$	V
holubice	0	$\frac{1}{2}V$

V – hodnota zdroje
C – náklady na konflikt



John Maynard Smith (1920–2004)

Populární hry

Strategie hledání partnera

Ještěrka *Uta stansburniana*

				
velké teritorium, několik samic		0	wins	loses
teritorium s jednou samicí		loses	0	wins
nemá teritorium		wins	loses	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

Kámen-nůžky-papír

			
	0	wins	loses
	loses	0	wins
	wins	loses	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Populární hry

Strategie hledání partnera

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	1	-1
Nůžky	-1	0	1
Papír	1	-1	0

Rovnováha: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

Richard Dawkins

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Richard Dawkins

Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Richard Dawkins

		♀	
		coy	fast
♂	faithful	$V-C-c$ (♀) ; $V-C-c$ (♂)	$V-C$ (♀) ; $V-C$ (♂)
	philanderer	0 (♀) ; 0 (♂)	$V-2C$ (♀) ; V (♂)

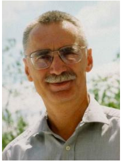
Populární hry

Boj pohlaví (the battle of sexes)

Účastníci	Strategie	
♂	věrný (faithful)	záletník (philanderer)
♀	zdrženlivá (coy)	rychlá (fast)

V – hodnota potomka
$2C$ – rodičovská investice
c – náklady na svatbu (cost of engagement period)

Peter Schuster



Karl Sigmund

		♀	
		coy	fast
♂	faithful	$V-C-c$ $V-C-c$	$V-C$ $V-C$
	philanderer	0 0	$V-2C$ V

MASARYKOVA UNIVERZITA