Zkušenost: Statistická indukce

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

3. listopadu 2022

Obsah

Počátky
- Vitální (popisná) statistika
- Matematická (inferenční) statistika

Základní úlohy matematické statistiky

Maximální věrohodnost

Bayesovská inference

Využití variability

Prehistorie

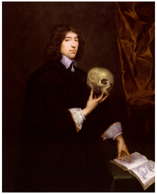
Prehistorie

- Farní statistiky (křty, svatby, pohřby) – v Burgundsku od 14. století

Prehistorie

- Farní statistiky (křty, svatby, pohřby) – v Burgundsku od 14. století
- Londýnské soupisy úmrtí (pohlaví, věk příčina úmrtí) – J. Graunt:
  Londýnská strašlivá vizitace: O souboru všech soupisů úmrtí za tento rok počínajících 17. prosincem a končících 19 prosincem roku následujícího. Čili soupis VŠEOBECNÝ podle zprávy učiněné Jeho Nejvznešenějšímu Královskému Veličenstvu společenstvím farních úředníků v Londýně.
  W. Petty – politická aritmetika

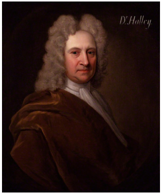
John Graunt 1620–1674



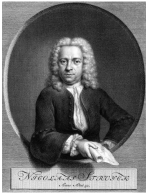
Sir William Petty 1623-1687

Prehistorie

- Farní statistiky (křty, svatby, pohřby) – v Burgundsku od 14. století
- Londýnské soupisy úmrtí (pohlaví, věk příčina úmrtí) – J. Graunt:
  Londýnská strašlivá vizitace: O souboru všech soupisů úmrtí za tento rok počínajících 17. prosincem a končících 19 prosincem roku následujícího. Čili soupis VŠEOBECNÝ podle zprávy učiněné Jeho Nejvznešenějšímu Královskému Veličenstvu společenstvím farních úředníků v Londýně.
  W. Petty – politická aritmetika
- Úmrtnostní tabulky (Life Table, Table of Vitality) – E. Halley
  N. Struyck – odhad počtu lidí na Zemi, otázka kinematiky



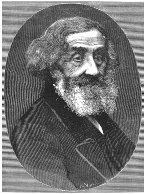
Edmond Halley 1656–1742



Nicolaas Struyck 1687–1769

Prehistorie

- Farní statistiky (křty, svatby, pohřby) – v Burgundsku od 14. století
- Londýnské soupisy úmrtí (pohlaví, věk příčina úmrtí) – J. Graunt:
  Londýnská strašlivá vizitace: O souboru všech soupisů úmrtí za tento rok počínajících 17. prosincem a končících 19 prosincem roku následujícího. Čili soupis VŠEOBECNÝ podle zprávy učiněné Jeho Nejvznešenějšímu Královskému Veličenstvu společenstvím farních úředníků v Londýně.
  W. Petty – politická aritmetika
- Úmrtnostní tabulky (Life Table, Table of Vitality) – E. Halley
  N. Struyck – odhad počtu lidí na Zemi, otázka kinematiky
- Populační věda, demografie – J. Guillard

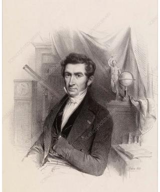


Jean Paul Achille Guillard 1799-1896

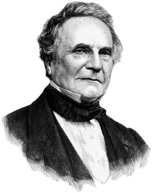
Zakladatelé

Sanitární reformy

- Londýnská statistická společnost



Adolphe Quetelet 1796–1874

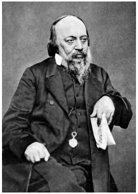


Charles Babbage 1791–1871

Zakladatelé

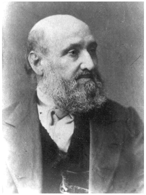
Sanitární reformy

- Londýnská statistická společnost
- Preventivní medicína – E. Chadwick, W. Farr, T. Edmonds



Sir Edwin Chadwick 1800–1890

Thomas Rowe Edmonds 1803–1889



William Farr 1807–1893

Zakladatelé

Sanitární reformy

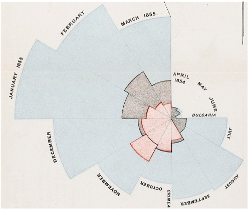
- Londýnská statistická společnost
- Preventivní medicína – E. Chadwick, W. Farr, T. Edmonds
- F. Nightingale, „dáma s lampou“ – Statistika za Krymské války (1853–56)

Florence Nightingale 1820–1910

Zakladatelé

Sanitární reformy

- Londýnská statistická společnost
- Preventivní medicína – E. Chadwick, W. Farr, T. Edmonds
- F. Nightingale, „dáma s lampou“ – Statistika za Krymské války (1853–56)



Florence Nightingale 1820–1910

Zakladatelé

Sanitární reformy

- Londýnská statistická společnost
- Preventivní medicína – E. Chadwick, W. Farr, T. Edmonds
- F. Nightingale, „dáma s lampou“ – Statistika za Krymské války (1853–56)

Statistika je ta nejdůležitější věda na světě. Máme-li porozumět Božímu uvažování, musíme studovat statistiky, neboť právě ony jsou mírou Jeho záměrů.

Florence Nightingale 1820–1910

Základní úloha popisné statistiky

Sumarizace dat

Východisko – typologické představy, determinismus

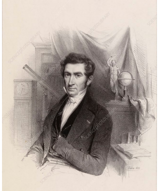
Základní úloha popisné statistiky

Sumarizace dat

Východisko – typologické představy, determinismus

Quetelet – sociální fyzika

Auguste Comte 1798–1857



Adolphe Quetelet 1796–1874

Základní úloha popisné statistiky

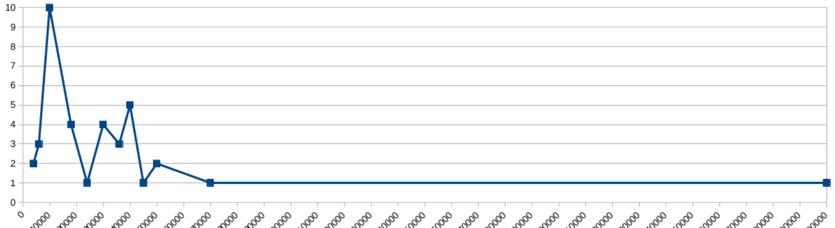
Sumarizace dat

Východisko – typologické představy, determinismus

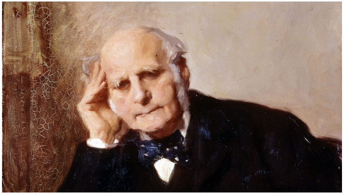
Quetelet – sociální fyzika

Příklad: platy v jisté firmě

aritmetický průměr:	£ 33 285.714
medián:	£ 24 000
modus:	£ 18 000

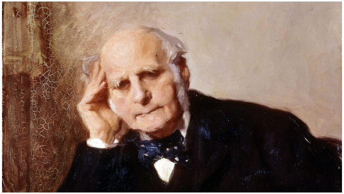


Zakladatelé



Francis Galton 1822–1911

Zakladatelé



Francis Galton 1822–1911

Karl Pearson 1857–1936

George Udny Yule 1871–1951

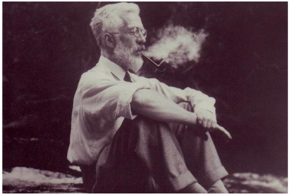
William Sealy Gosset 1876–1937

Zakladatelé


Karl Pearson 1857–1936


George Udny Yule 1871–1951


William Sealy Gosset 1876–1937


Ronald Aymler Fisher 1890–1962

Základní úlohy matematické statistiky

Základní úlohy matematické statistiky

- Identifikace modelu

Základní úlohy matematické statistiky

- Identifikace modelu
- Testování hypotéz

Základní úlohy matematické statistiky

- Identifikace modelu
- Testování hypotéz

Metody

- Parametrické
- Neparametrické (data driven)

Princip maximální věrohodnosti

„Jest zcela nezpochybnitelným faktem, že nemůžeme-li poznat nejpravdivější soudy, musíme se řídit soudy nejpravděpodobnějšími.“

René Descartes, Rozprava o metodě

René Descartes 1596–1650

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

Lincolnova-Petersonova metoda, *mark-recatch*

- Odchytíme a označkujeme m jedinců.
- Po dostatečném čase, ale ne příliš dlouhém, odchytíme dostatečné množství dalších jedinců a spočítáme počet označených mezi nimi.

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n, r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m, k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n - m$ neoznačených jedinců vybrat $r - k$:

$$c(n - m, r - k) = \binom{n - m}{r - k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n,r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m,k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n-m$ neoznačených jedinců vybrat $r-k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n,r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m,k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n-m$ neoznačených jedinců vybrat $r-k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathrm{P}(A_n^{mrk})$ maximální.

Princip maximální věrohodnosti

Aplikace: Odhad počtu jedinců volně žijící populace

počet nově ulovených jedinců: r počet označených jedinců mezi nimi: k
neznámý počet jedinců v populaci: n; určitě je $n \geq \max\{m, r\}$

počet možností, jak mezi n jedinci vybrat r: $c(n,r) = \binom{n}{r}$

počet možností, jak z m označených jedinců vybrat k: $c(m,k) = \binom{m}{k}$

počet možností, jak z $n-m$ neoznačených jedinců vybrat $r-k$:

$$c(n-m, r-k) = \binom{n-m}{r-k}$$

A_n^{mrk} … jev: populace je tvořena n jedinci, mezi nimi je m označených a při druhém odchytu mezi r ulovenými jedinci bylo k označených

$$\mathrm{P}(A_n^{mrk}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Hledáme takové n, aby při daných m, r, k byla hodnota $\mathrm{P}(A_n^{mrk})$ maximální.

Je $n \in \left\langle \frac{mr}{k}, \frac{mr}{k} + 1 \right)$.

Rozložení náhodné veličiny

Konkrétní případ: binomické rozdělení (Bernoulliovo)

Jakob Bernoulli 1655–1705

Rozložení náhodné veličiny

Konkrétní případ: binomické rozdělení (Bernoulliovo)

Pravděpodobnost úspěchu v nějakém pokusu je rovna p.
Pokus zopakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu B_n^k, že úspěch nastane právě k-krát?

Počet možností výběru k pořadových čísel úspěšných pokusů mezi n provedenými:

$$c(n,k) = \binom{n}{k}$$

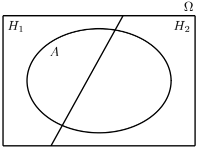
Pravděpodobnost k úspěchů a $n-k$ neúspěchů:

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Celkem:

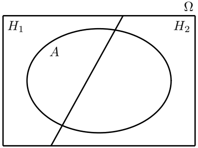
$$\mathrm{P}(B_n^k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Bayesův vzorec



Thomas Bayes 1702–1761

Bayesův vzorec

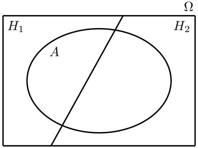


Inverzní pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Thomas Bayes 1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

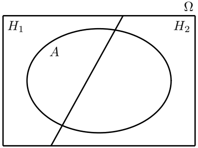
$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap H)\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Celková pravděpodobnost:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}\big((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2)\big) = \mathrm{P}(A \cap H_1) + \mathrm{P}(A \cap H_2) = \\ &= \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)\end{aligned}$$

Thomas Bayes 1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

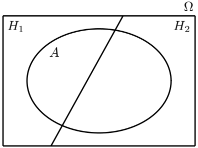
$$\mathrm{P}(H|A) = \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(A|H)$$

Celková pravděpodobnost:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A|H_2)$$

Thomas Bayes 1702–1761

Bayesův vzorec



Inverzní pravděpodobnost:

$$\mathsf{P}(H|A) = \frac{\mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(A)}\mathsf{P}(A|H)$$

Celková pravděpodobnost:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)$$

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A|H_2)}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají.

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají.

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) = ?$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathrm{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathrm{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathrm{P}(H)$.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) = ?$

Označení jevů: H … objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' … objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

Vyšetřovaný *objekt* buď zjišťovanou charakteristiku (chorobu) má nebo nemá.
Test je postup, který dá právě jeden ze dvou možných výsledků:

$+$ pozitivní, choroba zjištěna
$-$ negativní, choroba nezjištěna

Vlastnosti testu:

Senzitivita – podíl pozitivních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) mají. $p = \mathrm{P}(+|H)$

Specificita – podíl negativních výsledků testu mezi všemi výsledky při testování osob, které sledovanou charakteristiku (chorobu) nemají. $q = \mathrm{P}(-|H')$

Předpokládáme, že známe pravděpodobnost výskytu zjišťované charakteristiky $r = \mathrm{P}(H)$.

incidence … počet nových případů choroby za časovou jednotku
prevalence … celkový počet nemocných

Otázka: jaká je pravděpodobnost, že vyšetřovaný objekt příslušnou charakteristiku vykazuje (má chorobu), pokud test dal pozitivní výsledek? $\mathrm{P}(H|+) = ?$

Označení jevů: H … objekt vykazuje charakteristiku (má chorobu)
H' … objekt nevykazuje charakteristiku (nemá chorobu)

Jevy $+$ a $-$, H a H' jsou komplementární:

$$\mathrm{P}(H') = 1 - r,\ \mathrm{P}(+|H') = 1 - q,\ \mathrm{P}(-|H) = 1 - p$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1 - p \\
\mathrm{P}(H') = 1 - r & \mathrm{P}(+|H') = 1 - q & \mathrm{P}(-|H') = q
\end{array}
$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(+|H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(+|H) + \mathrm{P}(H')\mathrm{P}(+|H')} = \frac{rp}{rp + (1-q)(1-r)} = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(-|H)}{\mathrm{P}(H)\mathrm{P}(-|H) + \mathrm{P}(H')\mathrm{P}(-|H')} = \frac{r(1-p)}{r(1-p) + (1-r)q} = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1-p \\ \mathrm{P}(H') = 1-r & \mathrm{P}(+|H') = 1-q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} P(H) = r & P(+|H) = p & P(-|H) = 1-p \\ P(H') = 1-r & P(+|H') = 1-q & P(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$P(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$P(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$
	senzitivita	$p = 0{,}998$
	specificita	$q = 0{,}99$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} P(H) = r & P(+|H) = p & P(-|H) = 1 - p \\ P(H') = 1 - r & P(+|H') = 1 - q & P(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$P(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$P(H|-) = \frac{r(1 - p)}{r + q - rq - rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$
	senzitivita	$p = 0{,}998$
	specificita	$q = 0{,}99$

$P(H|+) = 0{,}091$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} P(H) = r & P(+|H) = p & P(-|H) = 1-p \\ P(H') = 1-r & P(+|H') = 1-q & P(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$P(H|+) = \frac{rp}{1-r-q+rp+rq}$$

$$P(H|-) = \frac{r(1-p)}{r+q-rq-rp}$$

Příklad: AIDS

incidence	$r = 0,001$	
senzitivita	$p = 0{,}998$	
specificita	$q = 0{,}99$	$P(H|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} P(H) = r & P(+|H) = p & P(-|H) = 1 - p \\ P(H') = 1 - r & P(+|H') = 1 - q & P(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$P(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$P(H|-) = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$P(H|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$r_1 = 0{,}091$: $\quad P(H| + +) = 0{,}909$

Bayesův vzorec

Aplikace: Diagnostické testy

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(H) = r & \mathrm{P}(+|H) = p & \mathrm{P}(-|H) = 1 - p \\ \mathrm{P}(H') = 1 - r & \mathrm{P}(+|H') = 1 - q & \mathrm{P}(-|H') = q \end{array}$$

Bayesův vzorec:

$$\mathrm{P}(H|+) = \frac{rp}{1 - r - q + rp + rq}$$

$$\mathrm{P}(H|-) = \frac{r(1-p)}{r + q - rq - rp}$$

Příklad: AIDS	incidence	$r = 0,001$	
	senzitivita	$p = 0{,}998$	
	specificita	$q = 0{,}99$	$\mathrm{P}(H\|+) = 0{,}091$

Kumulace zkušenosti: osoby s pozitivním výsledkem otestujeme znovu

$r_1 = 0{,}091$: $\quad \mathrm{P}(H|++) = 0{,}909$

$r_2 = 0{,}909$: $\quad \mathrm{P}(H|+++) = 0{,}999, \ \mathrm{P}(H|++-) = 0{,}020$

MASARYKOVA UNIVERZITA