Kapitola 5

Makroekonomické modely

5.1 Harrodův-Domarův model ekonomického růstu

Základní ekonomickou veličinou je produkce. Produkovat může subjekt, který vlastní kapitál. Kapitálem jsou nejen peníze, ale především budovy, stroje, zařízení a podobně. Kapitál vzniká a obnovuje se investicemi. Budeme tedy uvažovat tři ekonomické ukazatele, tj. tři časově závislé proměnné – produkci $Y = Y(t)$, kapitál $K = K(t)$ a investice $I = I(t)$. Kdekoliv je vyvíjena jakákoliv ekonomická aktivita, tam je nějaká produkce; proto je veličina Y kladná. A jak již bylo řečeno, z toho, že je produkce plyne, že byl kapitál; tedy i veličina K je kladná.

První model dynamiky produkce sestavíme na základě tří postulátů:

HD1 Kapitál vzniká investicemi a mizí amortizací.

HD2 Do tvorby kapitálu je investován stálý podíl produktu.

HD3 Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.

Označme δ podíl kapitálu, který se za jednotku času znehodnotí amortizací, κ čas, za který se z investované částky stane kapitál. Typicky je $\kappa = 1$, neboť investice z jednoho období jsou v následujícím období již kapitálem. S těmito symboly upřesníme postulát **HD1** jako rovnost

$$K(t + \Delta t) = K(t) + \frac{1}{\kappa} I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta(t),$$

neboli

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa} I(t) - \delta K(t).$$

Budeme dále předpokládat, že čas plyne spojitě a veličina K je diferencovatelná. Pak můžeme limitním přechodem $\Delta t \to 0$ vyjádřit postulát **HD1** ve tvaru diferenciální rovnice

$$K' = \frac{1}{\kappa} I - \delta K. \tag{5.1}$$

Předpoklad **HD2** je vyjádřen rovností

$$I = (1 - s)Y, \tag{5.2}$$

kde $s \in (0, 1)$. Parametr s vyjadřuje podíl produkce, který není investován, tedy je spotřebován nebo uspořen. Z nerovnosti $s < 1$ a kladnosti veličiny Y plyne, že také veličina I je kladná.

Předpoklad **HD3** formálně zapíšeme jako rovnost

$$\frac{K'}{K} = \frac{Y'}{Y}. \tag{5.3}$$

Z této rovnosti plyne

$$0 = \frac{K'}{K} - \frac{Y'}{Y} = \frac{K'Y - KY'}{Y^2}\frac{Y}{K} = \left(\frac{K}{Y}\right)'\frac{Y}{K}.$$

Poněvadž veličiny K a Y jsou kladné, plyne odtud, že $\left(\frac{K}{Y}\right)' = 0$ a tedy existuje konstanta $r \in \mathbb{R}$, že

$$\frac{K}{Y} = r, \tag{5.4}$$

neboli

$$K = rY. \tag{5.5}$$

Naopak, z této rovnosti plyne $K' = rY'$ a vydělením této rovnosti rovností (5.5) dostaneme rovnost (5.3). Předpoklad **HD3** lze tedy ekvivalentně vyjádřit rovností (5.3) nebo (5.5).

Z rovností (5.3), (5.1), (5.2) a (5.5) nyní dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{(1-s)Y}{K} - \delta = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta,$$

tedy

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta = const, \tag{5.6}$$

relativní rychlost růstu produkce je za předpokladů **HD1**, **HD2** a **HD3** konstantní. Označme ji g a z rovnice (5.6) dostaneme

$$Y(t) = Y_0 e^{gt},$$

kde $Y_0 = Y(0)$ je počáteční produkce. Znaménko konstanty g určuje, zda produkce roste nebo klesá. Konstanta r je podle (5.4) poměrem produkce a kapitálu, vyjadřuje tedy *kapitálovou náročnost jednotky produkce*. Závěr analýzy modelu nyní můžeme přeformulovat:

$$\text{je-li } r < \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce roste,}$$
$$\text{je-li } r = \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce stagnuje,}$$
$$\text{je-li } r > \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce klesá.}$$

Nebo stručně: je-li kapitálová náročnost jednotky produkce příliš velká, pak produkce nemůže růst.

5.2 Solowův-Swanův neoklasický model růstu

Budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku, tj. takovou, že jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce, nikoliv zahraniční obchod. Kromě (agregátní) produkce $Y = Y(t)$, kapitálu $K = K(t)$ a investic $I = I(t)$ do modelu zahrneme i práci $L = L(t)$. Práci pro potřeby modelu stotožníme s vytvářenou hodnotou[1], měříme ji tedy ve stejných jednotkách (penězích) jako veličiny Y, K, nebo I. Práce vždy vytváří hodnotu, proto je veličina L kladná.

Budeme předpokládat, že kapitál a investice splňují postuláty **HD1** a **HD2**, tedy rovnosti (5.1) a (5.2). Dále budeme postulovat:

SS1 Relativní růst (změna) práce je konstantní, odpovídá přirozenému přírůstku (nebo úbytku) obyvatelstva.

SS2 Jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce.

Postulát **SS1** lze zapsat jako rovnost

$$\frac{L'}{L} = \lambda, \tag{5.7}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. Postulát **SS2** zapíšeme rovností

$$Y = f(K, L). \tag{5.8}$$

Funkce f se nazývá *(agregátní) produkční funkce.* Poněvadž všechny tři veličiny K, L, Y považujeme za kladné, je

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty).$$

Aby funkce f vystihovala ekonomickou realitu, budeme předpokládat, že vyhovuje třem přirozeným požadavkům

pf1 Malá změna produkčního faktoru vyvolá malou změnu produkce, přitom zvětšení výrobního faktoru nevede ke zmenšení produkce.

pf2 Produkce není závislá na tom, v jakých (peněžních) jednotkách vyjadřujeme produkci a produkční faktory.

pf3 Platí *zákon klesajících výnosů:* dodatečná jednotka produkčního faktoru nevytvoří větší produkt, než jednotka předcházející a mezní produkt při neomezeném růstu produkčního faktoru klesá k nule.

Postulát **pf1** říká, že produkční funkce je spojitá a neklesající v každé své proměnné. Změna jednotky je totéž, co vynásobení proměnné nějakou kladnou konstantou. Postulát **pf2** tedy požaduje, aby pro každé $\alpha > 0$ platilo

$$f(\alpha K, \alpha K) = \alpha Y = \alpha f(K, L), \tag{5.9}$$

tj. produkční funkce je homogenní prvního řádu. Označme na chvíli jednotku kapitálu ΔK. Zákon klesajících výnosů pro kapitál nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$f(K, L) - f(K - \Delta K, L) \geq f(K + \Delta K, L) - f(K, L) \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$$

pro libovolnou hodnotu L. Uvedenou nerovnost můžeme také přepsat ve tvaru

$$f(K, L) \geq \frac{1}{2} f(K - \Delta K, L) + \frac{1}{2} f(K + \Delta K, L).$$

[1] Poznamenejme, že hodnota obecně není totéž, co produkce.

Analogicky vyjádříme zákon klesajících výnosů pro práci. Obecně přeformulujeme (zesílíme!) postulát **pf3** výrokem: pro každé $\gamma \in (0,1)$ a všechny $K_1, K_2, L_1, L_2 > 0$ platí

$$f\big(\gamma K_1 + (1-\gamma)K_2, \gamma L_1 + (1-\gamma)L_2\big) \geq \gamma f(K_1, L_1) + (1-\gamma) f(K_2, L_2), \tag{5.10}$$

tj. funkce f je konkávní, a

$$\lim_{K\to\infty} \big(f(K+K_1, L_1) - f(K, L_1)\big) = 0 = \lim_{L\to\infty} \big(f(K, L+L_1) - f(K_1, L)\big). \tag{5.11}$$

Nyní zavedeme novou veličinu k, nazvanou *míra vybavenosti práce kapitálem,* vztahem

$$k = \frac{K}{L}. \tag{5.12}$$

S využitím rovností (5.1), (5.7), (5.2), (5.8) a (5.9) postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{k'}{k} &= \frac{L}{K}\left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{L}{K}\frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta - \lambda = \frac{1-s}{\kappa}\frac{Y}{K} - (\delta + \lambda) = \\ &= \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(K,L)}{K} - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{L}{K} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(k,1)}{k} - (\delta+\lambda).\end{aligned}$$

Tímto způsobem dostáváme *základní dynamickou rovnici neoklasického modelu*

$$k' = -(\delta+\lambda)k + \frac{1-s}{\kappa} f(k,1). \tag{5.13}$$

Funkci $f(\,\cdot\,, 1) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ nazýváme *produkční funkce v intenzivním tvaru.* Je to spojitá neklesající konkávní funkce, pro kterou podle (5.11) platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(k+k_1, 1) - f(k,1)\big) = 0$$

pro každé $k_1 > 0$. Z monotonie a nezápornosti funkce $f(\,\cdot\,,1)$ plyne existence limity

$$\lim_{k\to 0+} f(k,1) = f_0 \geq 0.$$

Fázovým prostorem jednorozměrné autonomní rovnice (5.13) je interval $(0,\infty)$. Stacionární bod k^* této rovnice splňuje rovnost

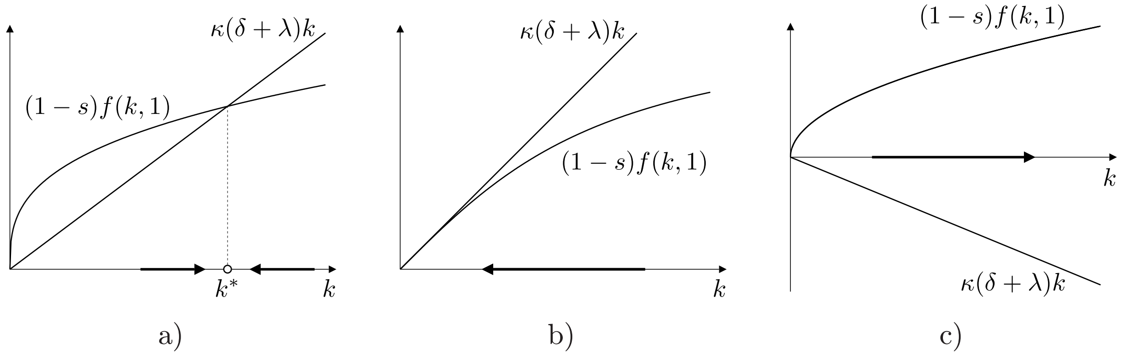
$$\kappa(\delta+\lambda)k^* = (1-s) f(k^*, 1). \tag{5.14}$$

Izolovaný stacionární bod rovnice (5.13) v jejím fázovém prostoru existuje právě tehdy, když $\delta + \lambda > 0$, tj. případný úbytek obyvatelstva (práce) je pomalejší, než amortizace kapitálu, a současně existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$f(k,1) > \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s}k \tag{5.15}$$

pro $k \in (0,\varepsilon)$, viz obr. 5.1. V takovém případě je pravá strana rovnice (5.13) kladná pro $k < k^*$ a záporná pro $k > k^*$. To znamená, že za takové situace pro každé řešení $k = k(t)$ rovnice (5.13) platí

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*,$$



Obrázek 5.1: Řešení rovnice (5.14) pro stacionární bod k^* základní dynamické rovnice neoklasického modelu (5.13). Na vodorovné ose je současně fázový portrét rovnice (5.13). a) $\delta+\lambda > 0$ a je splněna podmínka (5.15). b) Není splněna podmínka (5.15). c) Neplatí $\delta + \lambda > 0$.

vybavenost práce kapitálem se ustálí na konstantní hodnotě $k^* > 0$.

Podle (5.9) platí rovnost

$$f(k,1) = f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L} f(K,L) = \frac{Y}{L}.$$

Odtud plyne, že pro kapitálovou náročnost produkce $r = r(t)$ platí

$$r = \frac{Y}{K} = \frac{Y}{L}\frac{L}{K} = \frac{f(k,1)}{k}.$$

Ze spojitosti funkce $f(\,\cdot\,,1)$ nyní plyne, že existuje limita

$$r^* = \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f\big(k(t),1\big)}{k(t)} = \frac{f(k^*,1)}{k^*}, \tag{5.16}$$

tj. kapitálová náročnost produkce se ustálí na jisté hodnotě. Porovnáním se vztahem (5.4), který je ekvivalentní s postulátem **HD3** vidíme, že Harrodův-Domarův model je limitním případem modelu Solowova-Swanova. Harrodův-Domarův model popisuje *rovnovážnou ekonomiku,* v níž produkce roste stejně rychle jako kapitál.

Pokud $\delta + \lambda > 0$, ale není splněna podmínka (5.15), pak je pravá strana rovnice (5.13) záporná; každé její řešení tedy konverguje k nule. Pokud $\delta + \lambda < 0$, pak je pravá strana rovnice (5.13) kladná a každé její řešení diverguje do nekonečna. V obou takových případech ekonomika spěje ke kolapsu – vymizí kapitál nebo práce (tj. veškeré obyvatelstvo bude nezaměstnané). V reálné ekonomice tedy úbytek obyvatelstva nemůže být rychlejší než amortizace kapitálu a mezní produkt malého kapitálu musí být dostatečně velký.

5.2.1 Speciální produkční funkce

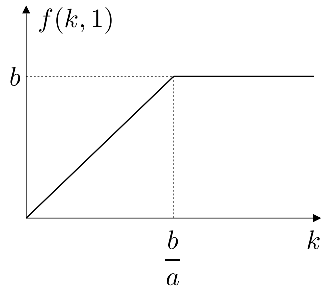
Leontiefova produkční funkce

$$f(K,L) = \min\{aK, bL\},$$

kde a, b jsou kladné konstanty, vyjadřuje předpoklad, že kapitál a práce mají na produktu pevný podíl. V případě, že $aK < bL$, tj. je nedostatek kapitálu, k produkci přispívá veškerý kapitál, ale část práce je neproduktivní. V případě, že $aK > bL$, tj. je nedostatek pracovní síly, zůstává část kapitálu ladem. Pouze v nepravděpodobném případě $aK = bL$ je veškerý kapitál i práce produktivní.

Produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = \min\{ak, b\}.$$



Kladný izolovaný stacionární bod rovnice (5.13) s Leontiefovou produkční funkcí existuje pouze tehdy, když je splněna podmínka (5.15), v tomto případě konkrétně když

$$a > \kappa \frac{\delta + \lambda}{1 - s},$$

tj. podíl kapitálu na produkci je dostatečně velký, kapitál je dostatečně efektivně využíván. Za takové situace je $f(k^*, 1) = b$, takže podle (5.14) je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{L(t)} = k^* = \frac{(1-s)b}{\kappa(\delta + \lambda)}.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} \frac{aK(t)}{bL(t)} = \frac{a(1-s)}{\kappa(\delta + \lambda)} > 1,$$

což znamená, že ve stabilizované ekonomice je $bL < aK$ a tedy v ní zůstává nevyužitý kapitál. Naopak, pokud by platila opačná nerovnost

$$a < \kappa \frac{\delta + \lambda}{1 - s},$$

ekonomika by konvergovala k nulové vybavenosti práce kapitálem a v důsledku toho k nulové produkci. Ani jeden ze scénářů samozřejmě nepředstavuje žádoucí stav.

Dvakrát diferencovatelná produkční funkce

Produkční funkce $f = f(K, L)$ je podle **pf1** neklesající a podle (5.10) konkávní v obou svých proměnných. U dvakrát diferencovatelné produkční funkce tyto požadavky poněkud zesílíme – budeme předpokládat, že funkce f je v obou svých proměnných rostoucí a ryze konkávní, tj. že pro všechna kladná K, L splňuje nerovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(K,L) < 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(K,L) < 0. \tag{5.17}$$

Zákon klesajících výnosů ve tvaru

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = 0 = \lim_{L\to\infty} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L) \tag{5.18}$$

doplníme předpokladem: pokud se v ekonomice objeví nový produkční faktor, pak jeho mezní výnos je obrovský; přesněji řečeno, budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{K\to 0+} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \infty = \lim_{L\to 0+} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L). \tag{5.19}$$

Podmínky (5.18) a (5.19) se nazývají *Inadovy*. Produkční funkce, která má vlastnosti (5.9), (5.17), (5.18) a (5.19) se nazývá *neoklasická*.

Tvrzení: V neoklasické funkci jsou oba produkční faktory podstatné, zmizí-li jeden z nich, zmizí i produkce, tj.

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = 0 = \lim_{L\to 0+} f(K,L). \tag{5.20}$$

Pokud některý z produkčních faktorů roste neomezeně, pak neomezeně roste i produkce, tj.

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \infty = \lim_{L\to\infty} f(K,L). \tag{5.21}$$

Důkaz: Pro funkci f podle de l'Hospitalova pravidla a podle Inadovy podmínky (5.18) platí

$$\lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 0 \quad \text{pro libovolné } K > 0.$$

Z homogenity funkce f nyní plyne

$$0 = \lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \lim_{k\to 0+} f(k,1)$$

a dále

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = \lim_{K\to 0+} L\, f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L \lim_{k\to 0+} f(k,1) = 0,$$

což je první z rovností (5.20).

Z homogenity funkce f, z de l'Hospitalova pravidla a z Inadovy podmínky (5.19) plyne

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \lim_{K\to\infty} \frac{f\left(1, \dfrac{L}{K}\right)}{\dfrac{1}{K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{-\dfrac{L}{K^2}\, f'_{|2}\left(1, \dfrac{L}{K}\right)}{-\dfrac{1}{K^2}} = L \lim_{l\to 0+} f'_{|2}(1,l) = \infty$$

(symbol $f'_{|2}(x,y)$ označuje parciální derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (x,y)). To je první z rovností (5.21). Platnost druhých rovností (5.20) a (5.21) ukážeme analogicky. $\square$

Z první rovnosti (5.20), de l'Hospitalova pravidla a druhé Inadovy podmínky (5.19) plyne

$$\lim_{k\to 0+} \frac{f(k,1)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{\partial f(k,1)}{\partial k} = \infty.$$

Z této rovnosti dále plyne, že je splněna podmínka (5.15).

Rovnice (5.13) s neoklasickou produkční funkcí f má jediné kladné stacionární řešení k^*, které je globálně asymptoticky stabilní.

Cobbova-Douglasova produkční funkce

$$f(K,L) = AK^bL^{1-b},$$

kde $A > 0$, $b \in (0,1)$ je neoklasická; o tom se lze přesvědčit snadným přímým výpočtem. Konstanta A vyjadřuje produkci při jednotkovém kapitálu i práci. Z rovnosti

$$Y = AK^bL^{1-b}$$

je vidět, že k danému množství kapitálu K a požadované produkci Y lze určit potřebné množství práce

$$L = \sqrt[1-b]{\frac{Y}{AK^b}},$$

které tuto produkci zajistí. Naopak, k danému množství práce L lze určit množství kapitálu

$$K = \sqrt[b]{\frac{Y}{AL^{1-b}}},$$

které zajistí požadovanou produkci Y. Cobbova-Douglasova produkční funkce tedy vyjadřuje produkci v takové ekonomice, v níž jsou *kapitál a práce neomezeně substituovatelné.*

Cobbova-Douglasova produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = Ak^b,$$

takže základní rovnice neoklasického modelu (5.13) je tvaru

$$k' = -(\delta+\lambda)k + A\frac{1-s}{\kappa}k^b. \tag{5.22}$$

To je rovnice Bernoulliova, kterou podle 1.2.2.vi řešíme substitucí

$$x = k^{1-b}.$$

Tato substituce převede rovnici (5.22) na lineární nehomogenní rovnici

$$x' = -(1-b)(\delta+\lambda)x + A\frac{(1-s)(1-b)}{\kappa},$$

která má podle 1.2.2.iii řešení

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}\right)\mathrm{e}^{-(1-b)(\delta+\lambda)t} + \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

kde x_0 je počáteční hodnota. Poněvadž pro $\delta+\lambda > 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

dostaneme pro ustálenou hodnotu vybavenosti práce kapitálem vyjádření

$$k^* = \lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt[1-b]{x(t)} = \sqrt[1-b]{\frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}},$$

tedy

$$(k^*)^{1-b} = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}.$$

Odtud s využitím definice Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a porovnáním se vztahem (5.16) dostaneme

$$\frac{\kappa(\delta+\lambda)}{1-s} = \frac{A}{(k^*)^{1-b}} = \frac{A(k^*)^b}{k^*} = \frac{f(k^*,1)}{k^*} = r^*.$$

Poměr produkce a kapitálu v rovnovážné ekonomice s neomezeně substituovatelnou prací a kapitálem je tedy rovna konstantě

$$\kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s}.$$

5.3 Goodwinův model hospodářského cyklu

Práce v Solowovu-Swanovu modelu je abstraktní veličina, představuje vlastně hodnotu prací vytvořenou. Nyní budeme jako práci $L = L(t)$ označovat množství zaměstnaného obyvatelstva, které za svou práci dostává mzdu $W = W(t)$. Přesněji řečeno, W označuje nějakou střední hodnotu mzdy jednoho pracovníka. Dále budeme uvažovat množství $N = N(t)$ práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva. Pro zjednodušení zavedeme ještě veličiny: *produktivita práce*

$$a = \frac{Y}{L} \tag{5.23}$$

(střední množství produktu vytvořeného jedním pracujícím člověkem), *relativní zaměstnanost*

$$v = \frac{L}{N} \tag{5.24}$$

a *podíl mzdy na produkci*

$$u = \frac{W}{a} = \frac{WL}{Y}. \tag{5.25}$$

Ekonomiku budeme považovat za rovnovážnou, tj. budeme předpokládat, že produkce Y, kapitál K a investice I splňují postuláty **HD1** a **HD3** Harrodova-Domarova modelu, tedy rovnost (5.1) a ekvivalentní rovnosti (5.3), (5.4). Dále budeme postulovat:

G1 Veškerá čistá produkce, tj. produkce bez vyplacených mezd, je investována.

G2 Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.

G3 Projevuje se stálý technický pokrok, tj. konstantní relativní růst produktivity práce.

G4 Změna mzdové sazby závisí na zaměstnanosti.

Postulát **G1** nahrazuje předpoklad o investování **HD2** z Harrodova-Domarova modelu. Postuláty **G1**, **G2** a **G3** zapíšeme po řadě rovnostmi

$$I = Y - WL, \tag{5.26}$$

$$\frac{N'}{N} = \beta, \tag{5.27}$$

$$\frac{a'}{a} = \alpha, \tag{5.28}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou nějaké konstanty. V postulátu **G4** budeme změnu považovat za relativní a postulát zpřesníme vyjádřením

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v), \tag{5.29}$$

kde $\varphi : [0,1) \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, jejímž grafem je *Phillipsova křivka.* Její vlastnosti, které byly zjištěny empiricky, formálně vyjádříme tak, že funkce φ je na svém definičním oboru rostoucí a konvexní, zejména

$$\varphi'(v) > 0 \quad \text{pro } v \in [0,1) \tag{5.30}$$

a splňuje nerovnosti

$$\varphi(0) = \varphi_0 < 0, \tag{5.31}$$

tj. při malé zaměstnanosti (velké nezaměstnanosti) mzdy klesají (je-li práce vzácná, lidé jsou ochotni pracovat za nízkou mzdu),

$$\lim_{v \to 1-} \varphi(v) = \varphi_1 > 0, \tag{5.32}$$

tj. při velké zaměstnanosti mzdy rostou (chceme-li při téměř plné zaměstnanosti získat nového pracovníka, musíme ho přeplatit); přitom připouštíme i $\varphi_1 = \infty$ (to je dokonce obvyklejší předpoklad).

Podle (5.1), (5.26), (5.4) a (5.25) platí

$$\frac{K'}{K} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y - WL}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y}{K}\left(1 - \frac{WL}{Y}\right) - \delta = \frac{r}{\kappa}(1-u) - \delta.$$

Odtud a z rovnosti (5.3) při označení $\sigma = \dfrac{r}{\kappa}$ dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \sigma(1-u) - \delta. \tag{5.33}$$

Nyní vyjádříme relativní změnu zaměstnanosti pomocí rovností (5.24), (5.23), (5.27), (5.33) a (5.28).

$$\begin{aligned}\frac{v'}{v} = \frac{N}{L}\left(\frac{L}{N}\right)' = \frac{N}{L}\frac{L'N - LN'}{N^2} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N} = \frac{a}{Y}\left(\frac{Y}{a}\right)' - \beta = \frac{a}{Y}\frac{Y'a - Ya'}{a^2} - \beta = \\ = \frac{Y'}{Y} - \frac{a'}{a} - \beta = \sigma(1-u) - \delta - \alpha - \beta.\end{aligned}$$

Tedy při označení $\gamma = \sigma - \alpha - \beta - \delta$ máme

$$\frac{v'}{v} = -\sigma u + \gamma. \tag{5.34}$$

Relativní změnu podílu mzdy na produkci vyjádříme pomocí rovností (5.25), (5.29) a (5.28).

$$\frac{u'}{u} = \frac{a}{W}\left(\frac{W}{a}\right)' = \frac{a}{W}\frac{W'a - Wa'}{a^2} = \frac{W'}{W} - \frac{a'}{a} = \varphi(v) - \alpha,$$

tj.

$$\frac{u'}{u} = \varphi(v) - \alpha. \tag{5.35}$$

Rovnice (5.35) a (5.34) představují model vývoje podílu mezd na produkci a relativní zaměstnanosti. Můžeme je přepsat v obvyklém tvaru

$$\begin{aligned} u' &= u\big(\varphi(v) - \alpha\big), \\ v' &= v(\gamma - \sigma u); \end{aligned} \tag{5.36}$$

připomeňme, že fázový prostor systému (5.36) je množina $\Omega = [0, \infty) \times [0, 1)$ a že parametry α, σ jsou kladné.

Ze druhé rovnice systému (5.36) plyne diferenciální nerovnost $u' \leq \gamma v$ a tedy podle srovnávací věty 8 platí

$$v(t) \leq v(0)\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

Uvažujme nejprve $\gamma < 0$. Pak

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

Ze spojitosti funkce φ a podmínky (5.30) odtud plyne, že existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $\varphi\big((v(t)\big) \leq 0$ pro $t \geq t_1$. Podle první rovnice systému (5.36) pro $t \geq t_1$ platí $u'(t) \leq -\alpha u(t)$, takže $u(t) \leq u(t_1)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Proto také

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$

Případ $\gamma < 0$ popisuje ekonomiku, která spěje k podivnému stavu – nikdo nepracuje a na produkci se mzda nepodílí[2].

Dále budeme realističtěji předpokládat, že $\gamma > 0$.

Pokud $\varphi_1 < \alpha$, pak z první rovnice systému (5.36) plyne, že $u' \leq u(\varphi_1 - \alpha)$ a tedy pro všechna $t \geq 0$ je

$$u(t) \leq u(0)\mathrm{e}^{(\varphi_1-\alpha)t}.$$

To znamená, že existuje $t_2 \geq 0$ takové, že

$$u(t) \leq \frac{\gamma}{2\sigma} \quad \text{pro } t \geq t_2.$$

Podle druhé rovnice systému (5.36) pro $t \geq t_2$ platí

$$v'(t) = v(t)\big(\gamma - \sigma u(t)\big) \geq v(t)\left(\gamma - \sigma\frac{\gamma}{2\sigma}\right) = \frac{1}{2}\gamma v(t),$$

takže $v(t) \geq v(t_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma t}$. To znamená, že existuje $T \geq t_2$ takové, že

$$\lim_{t\to T-} v(t) = 1.$$

Podle věty 5 řešení nelze prodloužit za čas T. V případě $\varphi_1 < \alpha$ tedy ekonomika v konečném čase dospěje k plné zaměstnanosti, ale v tom okamžiku přestanou platit „ekonomické zákony“, ze kterých byl Goodwinův model sestaven[3].

Je-li $\varphi_1 > \alpha$ (což je zejména splněno, pokud $\varphi_1 = \infty$), pak existuje $v^* \in (0,1)$ takové, že $\varphi(v^*) = \alpha$, tj. $v^* = \varphi^{-1}(\alpha)$. Systém (5.36) má v tomto případě dva stacionární body

$$(0,0) \quad \text{a} \quad (u^*, v^*) = \left(\frac{\gamma}{\sigma}, \varphi^{-1}(\alpha)\right).$$

Variační matice systému (5.36) je

$$\mathsf{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi(v) - \alpha & u\varphi'(v) \\ -\sigma v & \gamma - \sigma u \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 - \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{J}(0,0) = \gamma(\varphi_0 - \alpha) < 0,$$

[2] To připomíná lidovou charakteristiku reálného socialismu, který fungoval v sedmdesátých a osmdesátých letech dvacátého století v Československé socialistické republice: „Občané předstírají, že pracují, stát předstírá, že platí.“

[3] Ekonomika s plnou zaměstnaností a s malým až zanedbatelným podílem mezd na produkci je snem komunistů — všichni budou pracovat (práce se stane první životní nutností), ale peníze již za komunismu nebudou. Tomuto ideálu se v realitě nejvíce přiblížil Pol Pot.

$$\mathsf{J}(u^*,v^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{\sigma}\varphi'(v^*) \\ -\sigma v^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{J}(u^*,v^*) = \gamma v^* \varphi'(v^*) > 0, \quad \operatorname{tr} \mathsf{J}(u^*,v^*) = 0.$$

Podle 4.3.1 je triviální stacionární bod $(0,0)$ sedlo. O typu stacionárního bodu (u^*,v^*) nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Budeme hledat vyjádření trajektorií systému (5.36). Vydělením jeho rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v(\gamma - \sigma u)}{u\big(\varphi(v) - \alpha\big)},$$

což je obyčejná rovnice se separovanými proměnnými. Podle 1.2.1 je její řešení implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\varphi(v) - \alpha}{v}\mathrm{d}v = \int \frac{\gamma - \sigma u}{u}\mathrm{d}u,$$

po úpravě

$$\sigma u - \ln\left(u^\gamma v^\alpha\right) + \int_{v_0}^{v} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = const;$$

přitom $v_0 \in (0,1)$ je nějaká konstanta vyjadřující počáteční zaměstnanost. Levou stranu poslední rovnosti označíme $G(u,v)$. Trajektorie systému (5.36) jsou tedy vrstevnicemi funkce G.

Poněvadž platí

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \sigma - \frac{\gamma}{u} = -\frac{\gamma - \sigma u}{u}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}(u^*,v^*) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\varphi(v)}{v} - \frac{\alpha}{v} = \frac{\varphi(v) - \alpha}{v}, \qquad \frac{\partial G}{\partial v}(u^*,v^*) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{\gamma}{u^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = 0,$$

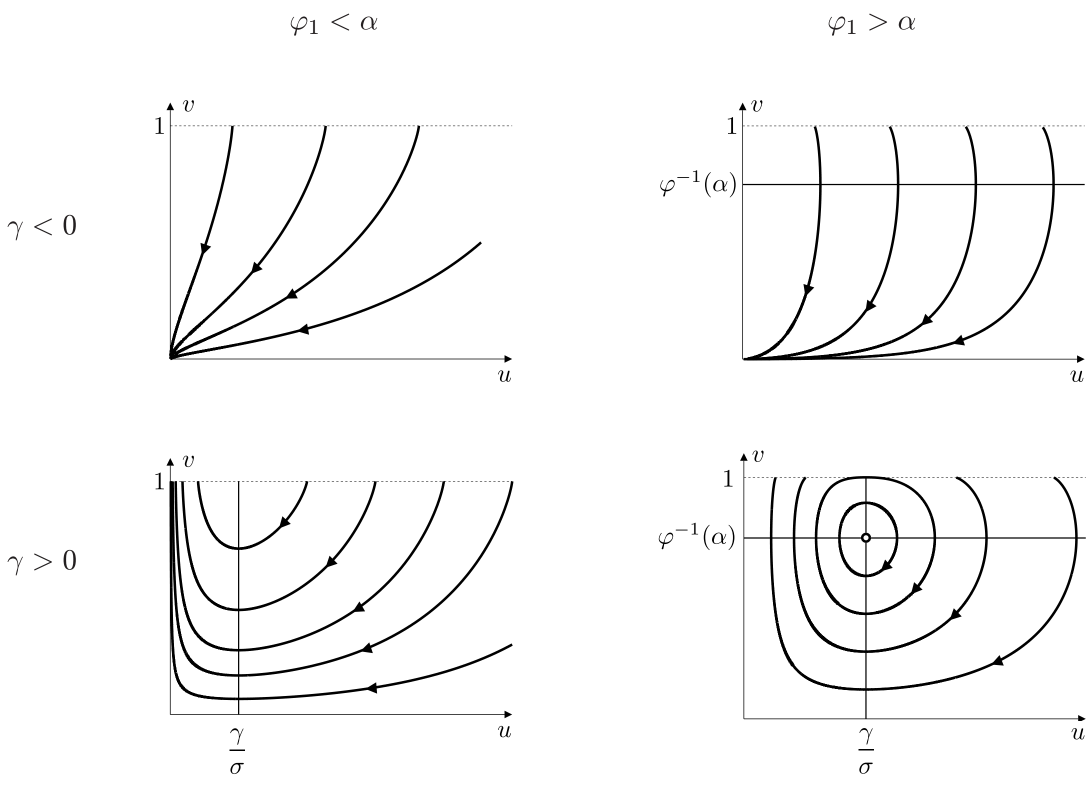
$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{v\varphi'(v) - \big(\varphi(v) - \alpha\big)}{v^2}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(u^*,v^*) = \frac{\varphi'(v^*)}{v^*} > 0,$$

je stacionární bod (u^*,v^*) lokálním minimem funkce G, a ta je v nějakém jeho okolí konvexní. To znamená, že trajektorie systému (5.36) začínající v okolí stacionárního bodu (u^*,v^*) jsou uzavřenými křivkami, stacionární bod je střed.

Možné umístění nulklin ve fázovém prostoru spolu s trajektoriemi systému (5.36) je znázorněno na obr. 5.2. Vidíme, že i v případě $\gamma > 0$, $\varphi_1 > \alpha$ je možné, že vývoj ekonomiky dospěje v konečném čase k plné zaměstnanosti a malému podílu mzdy na produkci, pokud je počáteční stav ekonomiky dostatečně daleko od rovnováhy. Jinak zaměstnanost kolísá kolem jisté rovnovážné hodnoty, v ekonomice se střídají období prosperity a útlumu; Goodwinův model tedy svým způsobem vysvětlil vznik a nevyhnutelnost hospodářského cyklu.

Obecně platí

$$\nabla G(u,v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma - \sigma u}{u} \\ \dfrac{\varphi(v) - \alpha}{v} \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \nabla G(u,v)^T \begin{pmatrix} u\big(\varphi(v) - \alpha\big) \\ v(\gamma - \sigma u) \end{pmatrix} = 0,$$



Obrázek 5.2: Trajektorie a nulkliny systému (5.36) pro možné kombinace parametrů

což znamená, že funkce G je prvním integrálem (invariantem) systému (5.36). Dále při označení $x = \ln u$, $y = \ln v$ dostaneme

$$x' = \varphi\left(\mathrm{e}^{y}\right) - \alpha, \qquad y' = \gamma - \sigma \mathrm{e}^{x}. \tag{5.37}$$

Systém (5.36) lze tedy transformovat na systém bipartitní; fázovým prostorem transformovaného systému je množina $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

Pro funkci

$$H(x,y) = G\left(\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{y}\right) = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma x - \alpha y + \int_{v_0}^{\mathrm{e}^{y}} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \mathrm{d}\eta = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma x - \alpha y + \int_{\ln v_0}^{y} \varphi(\mathrm{e}^{\xi}) \mathrm{d}\xi$$

(integrál jsme transformovali substitucí $\xi = \ln \eta$) platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha + \varphi\left(\mathrm{e}^{y}\right),$$

takže systém (5.37) můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla H(x,y).$$

Systém (5.37) je tedy hamiltonovský s hamiltoniánem H.