Bezkontextové jazyky

Uzávěrové vlastnosti

Šárka Vavrečková

Ústav informatiky, FPF SU Opava

Poslední aktualizace: 20. října 2008

Porovnání důkazů uzávěrových vlastností

Co to je?

Třída jazyků je uzavřena vůči dané operaci, pokud po uplatnění této operace na kterékoliv jazyky z dané třídy vznikne opět jazyk z této třídy jazyků.

Postup důkazu

- u regulárních jazyků: důkazy pomocí automatů
- u bezkontextových jazyků: většinou důkazy pomocí gramatik, jen u vztahu týkajícího se také regulárních jazyků (průnik bezkontextového a regulárního jazyka) se používají automaty

Značení a pojmy

Dále používáme toto značení:

$L_1 = L(G_1),\ G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$
$L_2 = L(G_2),\ G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2),\ N_1 \cup N_2 = \emptyset$
vytváříme $L = L(G),\ G = (N, T, P, S)$

Regulární operace

jsou operace používané při konstrukci regulárních výrazů, tj. sjednocení, zřetězení a iterace (Kleeneho uzávěr, operace hvězdička).

Sjednocení

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci sjednocení.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1 \cup L_2$:
$G = (N, T, P, S)$, symbol $S \notin N_1 \cup N_2$ (nově přidaný),
$T = T_1 \cup T_2$,
$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$,
$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$

Sjednocení

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci sjednocení.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1 \cup L_2$:
$G = (N, T, P, S)$, symbol $S \notin N_1 \cup N_2$ (nově přidaný),
$T = T_1 \cup T_2$,
$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$,
$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}$

Příklad

G_1 :

$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$

G_2 :

$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

G, kde $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$:

$S \to A \mid M$
$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$
$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

Příklad

G_1 :

$A \rightarrow aBA \mid CbB$
$B \rightarrow bCb \mid c$
$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

G_2 :

$M \rightarrow aNc \mid \varepsilon$
$N \rightarrow PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \rightarrow MN \mid ab$

G, kde $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$:

$S \rightarrow A \mid M$
$A \rightarrow aBA \mid CbB$
$B \rightarrow bCb \mid c$
$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$
$M \rightarrow aNc \mid \varepsilon$
$N \rightarrow PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \rightarrow MN \mid ab$

Příklad

Lze použít jako kritérium bezkontextovosti:

Jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1,\ i = j$ nebo $j = k\}$ lze napsat jako sjednocení dvou bezkontextových jazyků $L_x \cup L_y$, kde

$$L_x = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1,\ i = j\}$$
$$L_y = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1,\ j = k\}$$

Zřetězení

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zřetězení.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1 \cdot L_2$:

$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \; S \notin N_1 \cup N_2$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \cdot S_2\}$

$T = T_1 \cup T_2\}$

Zřetězení

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zřetězení.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1 \cdot L_2$:
$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\},\ S \notin N_1 \cup N_2$
$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \cdot S_2\}$
$T = T_1 \cup T_2\}$

Příklad

G_1 :

$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$

G_2 :

$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

G, kde $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$:

$S \to AM$
$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$
$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

Příklad

G_1 :

$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$

G_2 :

$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

G, kde $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$:

$S \to AM$
$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$
$M \to aNc \mid \varepsilon$
$N \to PbxM \mid Qu \mid b$
$Q \to MN \mid ab$

Iterace

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci iterace (Kleeneho uzávěru, operace hvězdička).

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^*$:

$N = N_1 \cup \{S\},\ S \notin N_1,\ T = T_1,$

$P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\}$

Iterace

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci iterace (Kleeneho uzávěru, operace hvězdička).

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^*$:
$N = N_1 \cup \{S\},\ S \notin N_1,\ T = T_1,$
$P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\}$

Příklad

G_1 :

$A \rightarrow aBA \mid CbB$

$B \rightarrow bCb \mid c$

$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^*$:

$S \rightarrow AS \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aBA \mid CbB$

$B \rightarrow bCb \mid c$

$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

Příklad

G_1 :

$A \rightarrow aBA \mid CbB$
$B \rightarrow bCb \mid c$
$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^*$:

$S \rightarrow AS \mid \varepsilon$
$A \rightarrow aBA \mid CbB$
$B \rightarrow bCb \mid c$
$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci pozitivní iterace.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^+$:
$N = N_1 \cup \{S\},\ S \notin N_1,\ T = T_1,$
$P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid S_1\}$

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci pozitivní iterace.

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^+$:
$N = N_1 \cup \{S\},\ S \notin N_1,\ T = T_1,$
$P = P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid S_1\}$

Příklad

G_1 :

$A \rightarrow aBA \mid CbB$

$B \rightarrow bCb \mid c$

$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^+$:

$S \rightarrow AS \mid A$

$A \rightarrow aBA \mid CbB$

$B \rightarrow bCb \mid c$

$C \rightarrow cA \mid \varepsilon$

Příklad

G_1 :

$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^+$:

$S \to AS \mid A$
$A \to aBA \mid CbB$
$B \to bCb \mid c$
$C \to cA \mid \varepsilon$

Zrcadlení (reverze)

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zrcadlení (reverze).

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^R$:
$N = N_1,\ T = T_1,\ S = S_1$

$P = \{A \rightarrow \alpha^R \mid (A \rightarrow \alpha) \in P_1,\ A \in N_1,\ \alpha \in (N \cup T)^*\}$

Zrcadlení (reverze)

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci zrcadlení (reverze).

Důkaz:

Vytvoříme gramatiku G takovou, že $L(G) = L_1^R$:

$N = N_1, \ T = T_1, \ S = S_1$

$$P = \{A \rightarrow \alpha^R \mid (A \rightarrow \alpha) \in P_1, \ A \in N_1, \ \alpha \in (N \cup T)^*\}$$

Příklad

G_1 :

$A \longrightarrow aBA \mid CbB$
$B \longrightarrow bCb \mid c$
$C \longrightarrow cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^R$:

$A \longrightarrow ABa \mid BbC$
$B \longrightarrow bCb \mid c$
$C \longrightarrow Ac \mid \varepsilon$

Příklad

G_1 :

$A \longrightarrow aBA \mid CbB$
$B \longrightarrow bCb \mid c$
$C \longrightarrow cA \mid \varepsilon$

G, kde $L(G) = L(G_1)^R$:

$A \longrightarrow ABa \mid BbC$
$B \longrightarrow bCb \mid c$
$C \longrightarrow Ac \mid \varepsilon$

Bezkontextová substituce a homomorfismus

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci bezkontextové substituce.

Co je to substituce?

Bezkontextová substituce s je takové zobrazení, které zobrazuje každý symbol původní abecedy na *bezkontextový jazyk* a přitom platí

$s(\varepsilon) = \varepsilon, \; s(a \cdot v) = s(a) \cdot s(v), \; a \in (N \cup T), \; v \in (N \cup T)^*$

Bezkontextová substituce a homomorfismus

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci bezkontextové substituce.

Co je to substituce?

Bezkontextová substituce s je takové zobrazení, které zobrazuje každý symbol původní abecedy na *bezkontextový jazyk* a přitom platí

$s(\varepsilon) = \varepsilon, \; s(a \cdot v) = s(a) \cdot s(v), \; a \in (N \cup T), \; v \in (N \cup T)^*$

Důkaz:

- L_1 je bezkontextový jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,
- bezkontextové jazyky $J_1, J_2, \ldots, J_n$ nad abecedami $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$,
- k nim existují bezkontextové gramatiky $G_{J_i} = (N_{J_i}, \Sigma_i, P_{J_i}, a_i)$, v každé gramatice G_{J_i} je startovacím symbolem a_i, $1 \leq i \leq n$,
- pro každé i, $1 \leq i \leq n$ je $s(a_i) = J_i$,
- předpokládejme, že množiny neterminálních symbolů N_{J_i} jsou po dvou disjunktní a taktéž průnik kterékoliv z těchto množin neterminálů s množinou N_1 je prázdný.

Jazyk $L = s(L_1)$ sestrojíme takto:
$N = N_1 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_{J_i}$
$T = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$
$P = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{J_i}$

Důkaz:

- L_1 je bezkontextový jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,
- bezkontextové jazyky $J_1, J_2, \ldots, J_n$ nad abecedami $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$,
- k nim existují bezkontextové gramatiky $G_{J_i} = (N_{J_i}, \Sigma_i, P_{J_i}, a_i)$, v každé gramatice G_{J_i} je startovacím symbolem a_i, $1 \le i \le n$,
- pro každé i, $1 \le i \le n$ je $s(a_i) = J_i$,
- předpokládejme, že množiny neterminálních symbolů N_{J_i} jsou po dvou disjunktní a taktéž průnik kterékoliv z těchto množin neterminálů s množinou N_1 je prázdný.

Jazyk $L = s(L_1)$ sestrojíme takto:
$N = N_1 \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_{J_i}$
$T = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$
$P = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{J_i}$

Příklad

$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1,\ i = j \text{ nebo } j = k\}$

$G_1 = (\{S, A, B, X, Y\},\ \{a, b, c\},\ P_1,\ S)$ množina P_1:

$$
\begin{array}{lll}
S \to AX \mid YB & A \to aAb \mid ab & X \to cX \mid c \\
 & B \to bBc \mid bc & Y \to aY \mid a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s(a) = \{1^n \mid n \geq 0\}, & G_{J_a} = (\{a\}, \{1\}, \{a \to 1a \mid \varepsilon\}, a) \\
s(b) = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}, & G_{J_b} = (\{b\}, \{1, 0\}, \{b \to 1b0 \mid 10\}, b) \\
s(c) = \{0^n \mid n \geq 0\}, & G_{J_c} = (\{c\}, \{0\}, \{c \to 0c \mid \varepsilon\}, c)
\end{array}
$$

$G = (\{S, A, B, X, Y, a, b, c\},\ \{0, 1\},\ P,\ S)$ množina P:

$$
\begin{array}{lll}
S \to AX \mid YB & X \to cX \mid c & a \to 1a \mid \varepsilon \\
A \to aAb \mid ab & Y \to aY \mid a & b \to 1b0 \mid 10 \\
B \to bBc \mid bc & & c \to 0c \mid \varepsilon
\end{array}
$$

Generovaný jazyk je $L = s(L_1) = 1^* \cdot \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}^* \cdot 0^*$

Příklad

$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 1,\ i = j \text{ nebo } j = k\}$

$G_1 = (\{S, A, B, X, Y\},\ \{a, b, c\},\ P_1,\ S)$ množina P_1:

$$
\begin{array}{lll}
S \to AX \mid YB & A \to aAb \mid ab & X \to cX \mid c \\
 & B \to bBc \mid bc & Y \to aY \mid a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s(a) = \{1^n \mid n \geq 0\}, & G_{J_a} = (\{a\}, \{1\}, \{a \to 1a \mid \varepsilon\}, a) \\
s(b) = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}, & G_{J_b} = (\{b\}, \{1, 0\}, \{b \to 1b0 \mid 10\}, b) \\
s(c) = \{0^n \mid n \geq 0\}, & G_{J_c} = (\{c\}, \{0\}, \{c \to 0c \mid \varepsilon\}, c)
\end{array}
$$

$G = (\{S, A, B, X, Y, a, b, c\},\ \{0, 1\},\ P,\ S)$ množina P:

$$
\begin{array}{lll}
S \to AX \mid YB & X \to cX \mid c & a \to 1a \mid \varepsilon \\
A \to aAb \mid ab & Y \to aY \mid a & b \to 1b0 \mid 10 \\
B \to bBc \mid bc & & c \to 0c \mid \varepsilon
\end{array}
$$

Generovaný jazyk je $L = s(L_1) = 1^* \cdot \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}^* \cdot 0^*$

Průnik

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci průniku.

Důkaz:

Najdeme dva bezkontextové jazyky, jejichž průnikem je jazyk, který není bezkontextový.

$L_x = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$ (počet a je stejný jako počet b)
$L_y = \{a^i b^k c^k \mid i, j \geq 0\}$ (počet b je stejný jako počet c)
Průnikem těchto jazyků je
$L = L_x \cap L_y = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathscr{L}(CF)$

Průnik

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci průniku.

Důkaz:

Najdeme dva bezkontextové jazyky, jejichž průnikem je jazyk, který není bezkontextový.

$L_x = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$ (počet a je stejný jako počet b)
$L_y = \{a^i b^k c^k \mid i, j \geq 0\}$ (počet b je stejný jako počet c)
Průnikem těchto jazyků je
$L = L_x \cap L_y = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathscr{L}(CF)$

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Doplněk (komplement)

Věta

Třída bezkontextových jazyků není uzavřena vzhledem k operaci doplňku (komplementu) nad danou abecedou.

Důkaz sporem:

Podle DeMorganových pravidel platí $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

- předpokládejme, že třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k operaci doplňku

$\Rightarrow$ na pravé straně rovnice je množina bezkontextových jazyků

$\Rightarrow$ na levé straně rovnice je množina, ve které existují i jazyky, které nejsou bezkontextové (průnikem dvou bezkontextových jazyků může být i jazyk, který není bezkontextový)

$\Rightarrow$ spor

Průnik s regulárním jazykem

Věta

Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vzhledem k průniku s regulárním jazykem.

Důkaz:

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$$
$$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$$

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Sestrojíme $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $\quad L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.
Výpočet v automatu $\mathcal{A}$ je simultánní simulací obou původních automatů.

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Sestrojíme $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $\quad L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.
Výpočet v automatu $\mathcal{A}$ je simultánní simulací obou původních automatů.
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad Z_0 = Z_0'$

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Sestrojíme $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $\quad L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.
Výpočet v automatu $\mathcal{A}$ je simultánní simulací obou původních automatů.
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad Z_0 = Z_0'$

Stavy automatu $\mathcal{A}$ jsou uspořádané dvojice stavů původních automatů.
$Q = \{[q_1, q_2] \mid q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2\}$

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Sestrojíme $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, $\quad L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.
Výpočet v automatu $\mathcal{A}$ je simultánní simulací obou původních automatů.
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad Z_0 = Z_0'$

Stavy automatu $\mathcal{A}$ jsou uspořádané dvojice stavů původních automatů.
$Q = \{[q_1, q_2] \mid q_1 \in Q_1, \; q_2 \in Q_2\}$

Množina koncových stavů: $F = \{[q_1, q_2] \mid q_1 \in F_1, \; q_2 \in F_2\}$

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Definujeme δ funkci:

1. $\forall a \in \Sigma,\ q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2, p_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:
$$\delta([q_1, q_2], a, Z) \ni ([p_1, p_2], \gamma)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\delta_1(q_1, a, Z) \ni (p_1, \gamma),\ \delta_2(q_2, a) \ni p_2$$
2. Vyřešíme odlišnost původních automatů při práci se vstupní abecedou – ε-kroky pro konečný automat:
$\forall q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:
$$\delta([q_1, q_2], \varepsilon, Z) \ni ([p_1, q_2], \gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_1(q_1, \varepsilon, Z) \ni (p_1, \gamma)$$

Důkaz:

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$$
$$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$$

Definujeme δ funkci:

1. $\forall a \in \Sigma,\ q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2, p_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:
$$\delta([q_1, q_2], a, Z) \ni ([p_1, p_2], \gamma)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\delta_1(q_1, a, Z) \ni (p_1, \gamma),\ \delta_2(q_2, a) \ni p_2$$
2. Vyřešíme odlišnost původních automatů při práci se vstupní abecedou – ε-kroky pro konečný automat:
$\forall q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:
$$\delta([q_1, q_2], \varepsilon, Z) \ni ([p_1, q_2], \gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_1(q_1, \varepsilon, Z) \ni (p_1, \gamma)$$

Důkaz:

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^{(1)}, Z_0^{(1)}, F_1)$
$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^{(2)}, F_2)$

Definujeme δ funkci:

1. $\forall a \in \Sigma,\ q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2, p_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:

$$\delta([q_1, q_2], a, Z) \ni ([p_1, p_2], \gamma)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\delta_1(q_1, a, Z) \ni (p_1, \gamma),\ \delta_2(q_2, a) \ni p_2$$

2. Vyřešíme odlišnost původních automatů při práci se vstupní abecedou – ε-kroky pro konečný automat:
$\forall q_1, p_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma_1^*$:

$$\delta([q_1, q_2], \varepsilon, Z) \ni ([p_1, q_2], \gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_1(q_1, \varepsilon, Z) \ni (p_1, \gamma)$$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Sestrojíme automaty $\mathcal{A}_1,\ L(\mathcal{A}_1) = L, \quad \mathcal{A}_2,\ L(\mathcal{A}_2) = R$:

$\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$, kde

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$ $\quad$ $\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$ $\quad$ $\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$ $\quad$ $\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$ $\quad$ $\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\mathcal{A}_2 = (\{r\}\ \{a\},\ \delta_2,\ r,\ \{r\})$, kde $\delta_2(r, a) = r$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Sestrojíme automaty $\mathcal{A}_1,\ L(\mathcal{A}_1) = L, \quad \mathcal{A}_2,\ L(\mathcal{A}_2) = R$:

$\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$, kde

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$ $\quad\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$ $\quad\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$ $\quad\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$ $\quad\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\mathcal{A}_2 = (\{r\}\ \{a\},\ \delta_2,\ r,\ \{r\})$, kde $\delta_2(r, a) = r$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Sestrojíme automaty $\mathcal{A}_1$, $L(\mathcal{A}_1) = L$, $\mathcal{A}_2$, $L(\mathcal{A}_2) = R$:

$\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \{Z_0, a, b\}, \delta_1, q_0, Z_0, \{q_2\})$, kde

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$ $\quad \delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$ $\quad \delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$ $\quad \delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$ $\quad \delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\mathcal{A}_2 = (\{r\}\ \{a\}, \delta_2, r, \{r\})$, kde $\delta_2(r, a) = r$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Sestrojíme automaty $\mathcal{A}_1,\ L(\mathcal{A}_1) = L, \quad \mathcal{A}_2,\ L(\mathcal{A}_2) = R$:

$\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$, kde

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$	$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$	$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$	$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$	$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
	$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\mathcal{A}_2 = (\{r\}\ \{a\},\ \delta_2,\ r,\ \{r\})$, kde $\delta_2(r, a) = r$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Vytvoříme $\mathcal{A} = (Q,\ \{a,b\},\ \{Z_0,a,b\},\ \delta,\ [q_0,r],\ Z_0,\ F)$.

$\delta([q_0,r],a,Z_0) = \{[q_0,r],aZ_0])\}$
$\delta([q_0,r],a,a) = \{([q_0,r],aa),([q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],a,a) = \{[q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,r],\varepsilon)\}$

$Q = \{[q_0,r],\ [q_1,r],\ [q_2,r]\}, \quad F = \{[q_2,r]\}$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Vytvoříme $\mathcal{A} = (Q,\ \{a,b\},\ \{Z_0,a,b\},\ \delta,\ [q_0,r],\ Z_0,\ F)$.

$\delta([q_0,r],a,Z_0) = \{[q_0,r],aZ_0])\}$
$\delta([q_0,r],a,a) = \{([q_0,r],aa),([q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],a,a) = \{[q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,r],\varepsilon)\}$

$Q = \{[q_0,r],\ [q_1,r],\ [q_2,r]\}, \quad F = \{[q_2,r]\}$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Vytvoříme $\mathcal{A} = (Q,\ \{a,b\},\ \{Z_0,a,b\},\ \delta,\ [q_0,r],\ Z_0,\ F)$.

$\delta([q_0,r],a,Z_0) = \{[q_0,r],aZ_0])\}$
$\delta([q_0,r],a,a) = \{([q_0,r],aa),([q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],a,a) = \{[q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,r],\varepsilon)\}$

$Q = \{[q_0,r],\ [q_1,r],\ [q_2,r]\}, \quad F = \{[q_2,r]\}$

Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*$
$L \cap R = \{a^n a^n \mid n \geq 0\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Vytvoříme $\mathcal{A} = (Q,\ \{a,b\},\ \{Z_0,a,b\},\ \delta,\ [q_0,r],\ Z_0,\ F)$.

$\delta([q_0,r],a,Z_0) = \{[q_0,r],aZ_0])\}$
$\delta([q_0,r],a,a) = \{([q_0,r],aa),([q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],a,a) = \{[q_1,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,r],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,r],\varepsilon)\}$

$Q = \{[q_0,r],\ [q_1,r],\ [q_2,r]\}, \quad F = \{[q_2,r]\}$

Příklad

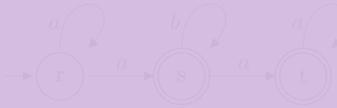
$$L = \left\{ ww^R \;\middle|\; w \in \{a,b\}^* \right\}, \qquad R = a^*ab^*a^*$$
$$L \cap R = \left\{ ww^R \;\middle|\; w \in a^*ab^* \right\}$$

$$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$$

$$\begin{array}{ll}
\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\} & \delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\} \\
\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\} & \delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\} \\
\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\} & \delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\} & \delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
 & \delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

$$A_2 = (\{r, s, t\},\ \{a,b\},\ \delta_2,\ r, \{s,t\})$$

$$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$$
$$\delta_2(s, a) = \{t\}$$
$$\delta_2(s, b) = \{s\}$$
$$\delta_2(t, a) = \{t\}$$



Příklad

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$, $\quad R = a^*ab^*a^*$

$L \cap R = \{ww^R \mid w \in a^*ab^*\}$

$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a, b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$

$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$

$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$

$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$

$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$A_2 = (\{r, s, t\},\ \{a, b\},\ \delta_2,\ r, \{s, t\})$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$

$\delta_2(s, a) = \{t\}$

$\delta_2(s, b) = \{s\}$

$\delta_2(t, a) = \{t\}$

Příklad

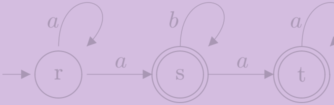
$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*ab^*a^*$$
$$L \cap R = \{ww^R \mid w \in a^*ab^*\}$$

$$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$$

$$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\} \qquad \delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$$
$$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\} \quad \delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\} \qquad \delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\} \qquad \delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$A_2 = (\{r, s, t\},\ \{a,b\},\ \delta_2,\ r, \{s, t\})$$

$$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$$
$$\delta_2(s, a) = \{t\}$$
$$\delta_2(s, b) = \{s\}$$
$$\delta_2(t, a) = \{t\}$$



Příklad

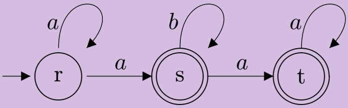
$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}, \quad R = a^*ab^*a^*$$
$$L \cap R = \{ww^R \mid w \in a^*ab^*\}$$

$$A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\},\ \{a,b\},\ \{Z_0, a, b\},\ \delta_1,\ q_0,\ Z_0,\ \{q_2\})$$

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$	$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$	$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$	$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$	$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
	$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$$A_2 = (\{r, s, t\},\ \{a,b\},\ \delta_2,\ r, \{s,t\})$$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$



Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, Z_0) = \{([q_0, r], aZ_0), ([q_0, s], aZ_0)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, Z_0) = \{([q_0, r], aZ_0), ([q_0, s], aZ_0)\}$
$\delta([q_0, s], a, Z_0) = \{([q_0, t], aZ_0)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, Z_0) = \{([q_0, r], aZ_0), ([q_0, s], aZ_0)\}$
$\delta([q_0, s], a, Z_0) = \{([q_0, t], aZ_0)\}$
$\delta([q_0, t], a, Z_0) = \{([q_0, t], aZ_0)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_0, r], a, a) = \{([q_0, r], aa), ([q_0, s], aa), ([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, a) = \{([q_0, r], aa), ([q_0, s], aa), ([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$
$\delta([q_0, s], a, a) = \{([q_0, t], aa), ([q_1, t], \varepsilon)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, a) = \{([q_0, r], aa), ([q_0, s], aa), ([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$
$\delta([q_0, s], a, a) = \{([q_0, t], aa), ([q_1, t], \varepsilon)\}$
$\delta([q_0, t], a, a) = \{([q_0, t], aa), ([q_1, t], \varepsilon)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, b) = \{([q_0, r], ab), ([q_0, s], ab)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, b) = \{([q_0, r], ab), ([q_0, s], ab)\}$
$\delta([q_0, s], a, b) = \{([q_0, t], ab)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, r], a, b) = \{([q_0, r], ab), ([q_0, s], ab)\}$
$\delta([q_0, s], a, b) = \{([q_0, t], ab)\}$
$\delta([q_0, t], a, b) = \{([q_0, t], ab)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, s], b, Z_0) = \{([q_0, s], bZ_0)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_0, s], b, a) = \{([q_0, s], ba)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_0, s], b, b) = \{([q_0, s], bb), ([q_1, s], \varepsilon)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_1, r], a, a) = \{([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_1, r], a, a) = \{([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$$
$$\delta([q_1, s], a, a) = \{([q_1, t], \varepsilon)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_1, r], a, a) = \{([q_1, r], \varepsilon), ([q_1, s], \varepsilon)\}$
$\delta([q_1, s], a, a) = \{([q_1, t], \varepsilon)\}$
$\delta([q_1, t], a, a) = \{([q_1, t], \varepsilon)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_1, s], b, b) = \{([q_1, s], \varepsilon)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$$\delta([q_1, r], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, r], \varepsilon)\}$$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

$\delta([q_1, r], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, r], \varepsilon)\}$
$\delta([q_1, s], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, s], \varepsilon)\}$

Příklad

$\delta_1(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta_1(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
$\delta_1(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta_1(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta_1(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta([q_1, r], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, r], \varepsilon)\}$
$\delta([q_1, s], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, s], \varepsilon)\}$
$\delta([q_1, t], \varepsilon, Z_0) = \{([q_2, t], \varepsilon)\}$

$\delta_2(r, a) = \{r, s\}$
$\delta_2(s, a) = \{t\}$
$\delta_2(s, b) = \{s\}$
$\delta_2(t, a) = \{t\}$

Příklad

Celá δ-funkce:

$\delta([q_0,r],a,Z_0) = \{([q_0,r],aZ_0),([q_0,s],aZ_0)\}$
$\delta([q_0,s],a,Z_0) = \{([q_0,t],aZ_0)\}$
$\delta([q_0,t],a,Z_0) = \{([q_0,t],aZ_0)\}$

$\delta([q_0,r],a,a) = \{([q_0,r],aa),([q_0,s],aa),([q_1,r],\varepsilon),([q_1,s],\varepsilon)\}$
$\delta([q_0,s],a,a) = \{([q_0,t],aa),([q_1,t],\varepsilon)\}$
$\delta([q_0,t],a,a) = \{([q_0,t],aa),([q_1,t],\varepsilon)\}$

$\delta([q_0,r],a,b) = \{([q_0,r],ab),([q_0,s],ab)\}$
$\delta([q_0,s],a,b) = \{([q_0,t],ab)\}$
$\delta([q_0,t],a,b) = \{([q_0,t],ab)\}$

$\delta([q_0,s],b,Z_0) = \{([q_0,s],bZ_0)\}$
$\delta([q_0,s],b,a) = \{([q_0,s],ba)\}$
$\delta([q_0,s],b,b) = \{([q_0,s],bb),([q_1,s],\varepsilon)\}$

$\delta([q_1,r],a,a) = \{([q_1,r],\varepsilon),([q_1,s],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,s],a,a) = \{([q_1,t],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,t],a,a) = \{([q_1,t],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,s],b,b) = \{([q_1,s],\varepsilon)\}$

$\delta([q_1,r],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,r],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,s],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,s],\varepsilon)\}$
$\delta([q_1,t],\varepsilon,Z_0) = \{([q_2,t],\varepsilon)\}$

Uzávěrové vlastnosti jako kritérium bezkontextovosti

Použití – je jazyk L_1 bezkontextový?

- pokud dokážeme L_1 přepsat na sjednocení bezkontextových jazyků, je L_1 bezkontextový (totéž pro zřetězení, iteraci, pozitivní iteraci, reverzi, substituci, průnik s reg. jazykem)
- pokud L_1 sjednotíme s bezkontextovým jazykem a dostaneme jazyk, o němž víme, že *není* bezkontextový, pak ani L_1 není bezkontextový (totéž pro zřetězení, iteraci, pozitivní iteraci, reverzi, substituci, průnik s reg. jazykem)

Uzávěrové vlastnosti jako kritérium bezkontextovosti

Použití – je jazyk L_1 bezkontextový?

- pokud dokážeme L_1 přepsat na sjednocení bezkontextových jazyků, je L_1 bezkontextový (totéž pro zřetězení, iteraci, pozitivní iteraci, reverzi, substituci, průnik s reg. jazykem)
- pokud L_1 sjednotíme s bezkontextovým jazykem a dostaneme jazyk, o němž víme, že *není* bezkontextový, pak ani L_1 není bezkontextový (totéž pro zřetězení, iteraci, pozitivní iteraci, reverzi, substituci, průnik s reg. jazykem)

Uzávěrové vlastnosti jako kritérium bezkontextovosti

Použití – je jazyk L_1 bezkontextový?

Pozor – sjednocením dvou jazyků, z jichž některý není bezkontextový, může vzniknout bezkontextový jazyk:

$$L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin \mathscr{L}(CF)$$
$$L_2 = \{a^i b^j c^i \mid i, j \geq 1\} \in \mathscr{L}(CF)$$
$$L_1 \cup L_2 = L_2$$

Proč? Implikace!

Uzávěrové vlastnosti jako kritérium bezkontextovosti

Použití – je jazyk L_1 bezkontextový?

Pozor – sjednocením dvou jazyků, z jichž některý není bezkontextový, může vzniknout bezkontextový jazyk:

$$L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin \mathscr{L}(CF)$$
$$L_2 = \{a^i b^j c^i \mid i, j \geq 1\} \in \mathscr{L}(CF)$$
$$L_1 \cup L_2 = L_2$$

Proč? Implikace!

Příklad

Zjistíme, zda je následující jazyk bezkontextový:

$$L = \left\{ a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \dots a^{n_k} b^{n_k} \;\middle|\; k \geq 0,\; n_i \geq 1,\; 1 \leq i \leq k \right\}$$

Víme, že jazyk $L_1 = \left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$ je bezkontextový, a je zřejmé, že $L = L_1^*$ a proto i jazyk L je bezkontextový.

Příklad

Kdy nelze použít jako kritérium bezkontextovosti:

Víme, že jazyk $L = \left\{ a^{n^2} \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$ není bezkontextový. Zvolíme následující bezkontextovou (dokonce regulární) substituci:

$s(a) = b^*$

Po uplatnění substituce dostaneme jazyk $\left\{ b^i \,\middle|\, i \geq 0 \right\}$, což je bezkontextový (dokonce regulární) jazyk. Proto není pravda, že když je výsledkem operace bezkontextový jazyk, tak by operandy operace měly být také.

Příklad

$$L = \left\{ w \in \{a, b, c\}^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b = |w|_c \right\}$$

- Předpokládejme, že jazyk L je bezkontextový. Pak by průnikem tohoto jazyka s jakýmkoliv regulárním jazykem byl také bezkontextový jazyk.
- Vezmeme regulární jazyk $R = a^*b^*c^*$
- Průnikem je:
  $L \cap R = \left\{ a^n b^n c^n \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$

O tomto jazyce víme, že není bezkontextový, proto $L \notin \mathscr{L}(CF)$.

Příklad

$$L = \left\{ w \in \{a,b,c\}^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b = |w|_c \right\}$$

- Předpokládejme, že jazyk L je bezkontextový. Pak by průnikem tohoto jazyka s jakýmkoliv regulárním jazykem byl také bezkontextový jazyk.
- Vezmeme regulární jazyk $R = a^*b^*c^*$
- Průnikem je:
  $L \cap R = \left\{ a^n b^n c^n \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$

O tomto jazyce víme, že není bezkontextový, proto $L \notin \mathscr{L}(CF)$.

Příklad

$$L = \left\{ w \in \{a,b,c\}^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b = |w|_c \right\}$$

- Předpokládejme, že jazyk L je bezkontextový. Pak by průnikem tohoto jazyka s jakýmkoliv regulárním jazykem byl také bezkontextový jazyk.
- Vezmeme regulární jazyk $R = a^*b^*c^*$
- Průnikem je:
  $L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

O tomto jazyce víme, že není bezkontextový, proto $L \notin \mathscr{L}(CF)$.

Příklad

$$L = \left\{ w \in \{a, b, c\}^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b = |w|_c \right\}$$

- Předpokládejme, že jazyk L je bezkontextový. Pak by průnikem tohoto jazyka s jakýmkoliv regulárním jazykem byl také bezkontextový jazyk.
- Vezmeme regulární jazyk $R = a^* b^* c^*$
- Průnikem je:
  $L \cap R = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$

O tomto jazyce víme, že není bezkontextový, proto $L \notin \mathscr{L}(CF)$.

Příklad

$$L = \left\{ w \in \{a, b, c\}^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b = |w|_c \right\}$$

- Předpokládejme, že jazyk L je bezkontextový. Pak by průnikem tohoto jazyka s jakýmkoliv regulárním jazykem byl také bezkontextový jazyk.
- Vezmeme regulární jazyk $R = a^*b^*c^*$
- Průnikem je:
  $L \cap R = \left\{ a^n b^n c^n \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$

O tomto jazyce víme, že není bezkontextový, proto $L \notin \mathscr{L}(CF)$.