

1. Úvod do úvodu

E3101 Úvod do matematického modelování



Motivace

Matematické modelování

Matematický model

Motivace



- Jaký význam má **matematické modelování**? Proč má smysl vytvářet matematické modely reálných systémů?
 1. Porozumění okolnímu světu díky abstrakci:
 - vědecký popis reality,
 - užitečné zjednodušení a zdůraznění důležitých procesů.
 2. Schopnost předvídat chování systému:
 - v čase (chování systému v budoucnosti/v minulosti),
 - při změnách podmínek, ve kterých systém pracuje (citlivost).
 3. Podpora rozhodování:
 - krátkodobá rozhodnutí,
 - strategické rozhodování.

Matematické modelování



- Činnost vedoucí k vytvoření **matematického modelu**.
- Tvorba modelu vlastně znamená překlad našich znalostí (očekávání, předpokladů, víry) o modelovaném systému do jazyka matematiky. To má několik (ne)výhod:
 - matematický jazyk je obvykle velmi konkrétní a přesný – to může pomoci s formulací/zpřesněním našich myšlenek a znalostí o systému,
 - matematické vyjádření je stručné a jasně definované,
 - máme k dispozici veškerý matematický aparát, nástroje a výsledky (věty, důkazy) zdokonalované po staletí,
 - to všechno umíme efektivně zpracovat s využitím ICT!
- Obvykle vyžaduje spolupráci odborníků z různých oblastí:
 - odborníka z oblasti oboru řešené problematiky,
 - specialistu v oblasti matematiky,
 - specialistu z oblasti informatiky apod.

Matematické modelování



- Uvedené (ne)výhody umožňují přesnou formulaci, ale nesou s sebou také určitá omezení.
- To nás nutí ke kompromisům mezi jednoduchostí a přesností.
- V první řadě jde o míru zjednodušení reality:
 - většina reálných systémů je příliš komplikovaná na to, abychom je dokázali (efektivně) vyjádřit matematicky bez zjednodušení,
 - hned v úvodní fázi modelování je proto zapotřebí identifikovat nejdůležitější součásti modelovaného systému,
 - ostatní části systému budou (prozatím) zanedbány.

Matematické modelování

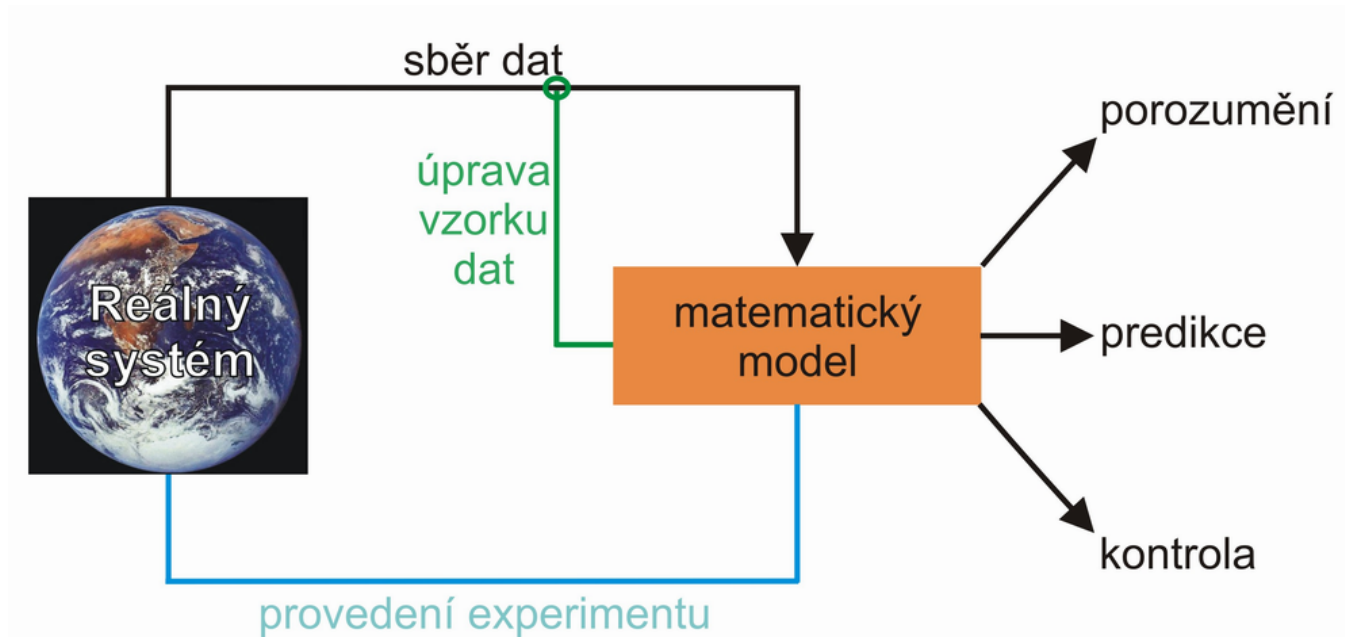


- Ve druhé řadě pak o míru složitosti matematického vyjádření:
 - matematika umožňuje získat výsledky (vyčíslit, dokázat) mnoha obecně vyjádřených problémů,
 - kvalita výsledků závisí na typu matematického vyjádření,
 - složitost vztahů, forma rovnic,
 - v některých případech může malá změna struktury vést k dalekosáhlým změnám výsledků modelu,
 - přesnost/citlivost řešení, robustní modely,
 - využití počítačů může pomoci se získáním přibližného řešení (numerické metody), pozor na citlivost!

Matematický model



Definice: Model je záměrně zjednodušený obraz reality (reálných objektů).



zjednodušený abstraktní popis reálného objektu (soubor vztahů, resp. instrukcí pro generování dat popisujících chování reálného objektu).

Matematický model

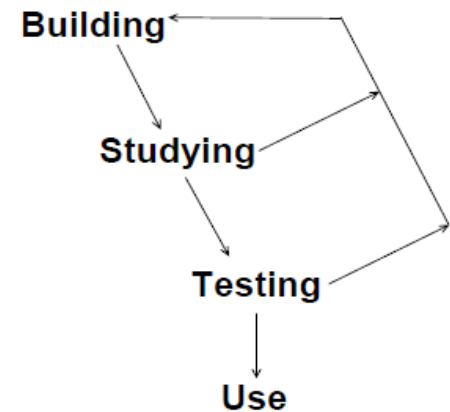


- Prvky modelu:
 - množiny vstupních a výstupních proměnných různých typů, včetně parametrů (konstant),
 - matematické struktury (rovnice), které určují stavy systému a vztahy mezi proměnnými a parametry,
 - řešení modelu.
- Proměnné reprezentují vlastnosti systému, např. výstupy měřených veličin ve tvaru signálů, vzorkovaná data, počty, výskyt dané události či jevu (ano/ne) apod.
- Na model se můžeme dívat také jako na množinu funkcí, která popisuje vztahy mezi různými proměnnými.

Matematické modelování

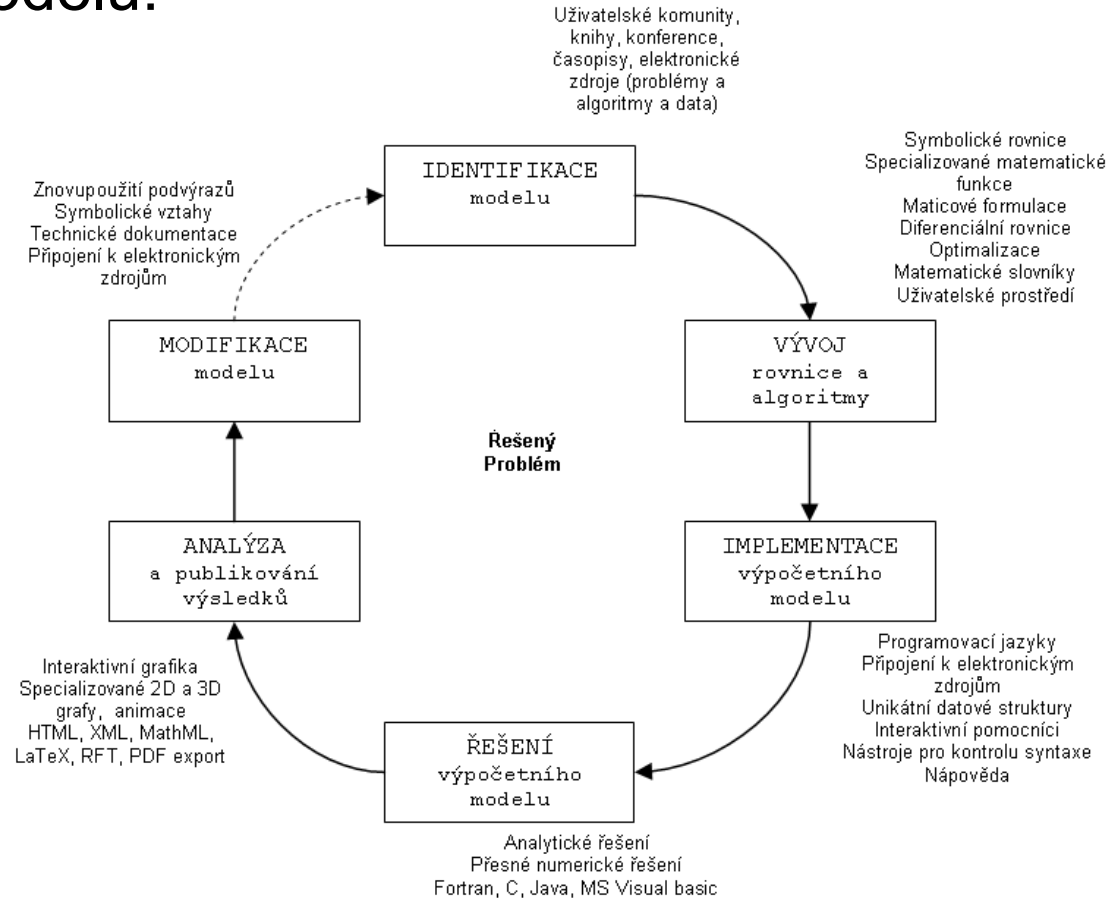


- Proces tvorby modelu má několik fází, mezi kterými existují významné zpětné vazby:
 - identifikace prvků modelu (proměnných),
 - studium vztahů mezi prvky modelu,
 - implementace modelu (s použitím ICT),
 - nalezení řešení modelu (jedno nebo více),
 - analýza řešení, jeho výhod a nedostatků,
 - modifikace modelu (iterativně).



Matematické modelování

- Proces tvorby modelu:



Identifikace prvků modelu



- Určení/výběr jednotlivých prvků matematického modelu.
- Lze využít odborné literatury, spolupráci s odbornou a komunitou.
- Vychází se z analýzy systému, jeho chování a stanovených cílů řešení.
- Realita je složitá, je třeba ji vymezit a pro účely modelu zjednodušit.
- Proto definujeme v rámci objektivní reality prvky, vstupy a výstupy, procesy, stavy a funkce.
- Dále provádíme zjednodušení (simplifikaci) řešeného problému, kdy nepodstatné oddělujeme od podstatného.

Studium vztahů mezi prvky modelu



- Tvorba základní struktury modelu.
- Identifikace vztahů mezi prvky modelu, a posléze jejich matematické vyjádření.
- Musí respektovat naše předpoklady a domněnky o tom, jak systém funguje.
- Budoucí analýzy systému vždy zachází s těmito předpoklady jako s pravdivými, ale jejich výsledky budou validní, pouze pokud jsou tyto předpoklady platné.
- Ve fázi studia vztahů může dojít ke korekci předchozího kroku při nutnosti přidat nebo odebrat některý z prvků modelu.

Implementace modelu



- Obvykle za využití ICT (naprogramování v příslušném programovacím jazyce).
- Odladění a verifikace modelu.
- Analýza výpočetní složitosti, využití příslušného hardware atd.
- Opět může dojít k přehodnocení závěrů předchozích dvou fází modelu, tj. identifikace prvků a studia vazeb modelu dle možností a potřeb jeho implementace.

Nalezení řešení modelu



- Po „naplnění“ modelu konkrétními parametry a daty lze přistoupit k jeho řešení
- V principu existují dva způsoby nalezení řešení matematického modelu:
 - a) analytické (explicitní) řešení spočívá v nalezení přesného řešení pomocí analytických matematických metod (řešení soustavy rovnic, řešení úlohy na vázaný extrém apod.).
 - b) numerické (přibližné) řešení se používá u modelů, u kterých neumíme problém řešit analyticky, nebo v případech, kdy je analytické řešení příliš složité nebo časově náročné. Při numerickém řešení je třeba uvažovat jeho numerickou stabilitu, konvergenci a chybu, která nám vznikne.

Analýza a verifikace řešení



- Testování/kontrola, zda (do jaké míry) výsledky souhlasí s chováním modelovaného systému.
- Modely „naplníme“ empirickými daty, výsledky porovnáваме s realitou.
- Vizualizace řešení.
- Model je jen přibližným obrazem objektivní reality. Je dobrý, pokud umožní přesně sledovat důsledky změn ve vstupech do systému na jeho výstupy.
- Cílem analýzy řešení je prověření správné struktury modelu, jeho vypovídací schopnosti ale i formálních kvantitativních vlastností včetně odstranění formálních chyb.

Modifikace modelu



- V případě, že dosažené řešení není v dostatečném souladu s realitou, iterativně se postupuje od fáze 1 přes celý cyklus.
- Metody prezentace modelu jeho potenciálním uživatelům závisí na jejich (matematických) znalostech.
- Pokud chce uživatel vědět raději méně o detailech modelu, je vhodné ukázat mu všechny relevantní informace o výstupech modelu.
- To umožní uživateli (který není programátorem) vytvořit si objektivnější pohled na řešení modelu a jeho interpretaci.

Reálný systém

= zkoumaná část reálného světa;

může být

přirozený (květina, včelí roj, počet zajíců,...)

nebo

umělý (počítač, tok materiálu ve výrobním podniku);

existující

nebo

plánovaný

= zdroj dat o svém chování