4. Model růstu populace

Bi3101 Úvod do matematického modelování

Populační modely

Model růstu populace

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Populační modely

- ***Populační modely*** řeší odpověď na otázku kolik jedinců bude mít modelovaná populace v daném čase $t > 0$, pokud známe tento počet na počátku (v čase $t = 0$).
- Modely růstu populace patří k nejrozšířenějším a nejznámějším.

Model neomezeného růstu populace

- Nejjednodušším populačním modelem je model exponenciálního růstu:
  - Předpokládejme, že změna velikosti N(t) populace v čase je způsobena pouze plozením nových jedinců a umíráním jiných.
  - Předpokládejme, že počet nově narozených, respektive zemřelých jedinců je přímo úměrný velikosti populace.
  - Hledáme řešení modelu, tj. velikost N(t) populace v čase t. Čas t budeme uvažovat buď jako diskrétní veličinu nabývající celočíselných hodnot (mohou představovat například roky, obecně generace), nebo jako spojitou veličinu.

Model neomezeného růstu populace

- Na základě vyslovených předpokladů jsme schopni sestavit rovnici modelu. Označme :
  - $N(t)$ funkci představující počet jedinců populace v čase t,
  - a koeficient porodnosti populace (podíl nově narozených jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
  - b koeficient úmrtnosti populace (podíl zemřelých jedinců vůči všem jedincům za jednotku času),
  - h délku časového intervalu (kladné reálné číslo).

Modifikace modelu

- Velikost populace se nicméně nemůže exponenciálně zvyšovat do nekonečna. Prostor, v němž populace žije, je omezený, podobně jako množství živin, které má k dispozici.
- Doplňme proto předpoklad modelu, že úmrtnost se bude zvyšovat se zvětšující se populací:
  - Nejjednodušší způsob závislosti je lineární závislost. Koeficient úmrtnosti tedy nebudeme již chápat jako konstantní číslo, ale jako rostoucí lineární funkci.
  - Koeficient úmrtnosti: $b + c \cdot N(t)$, kde b, c jsou reálná nezáporná čísla.
- Podobně jako dříve získáme rovnice modelu:
  - Diskrétní případ: $N(t + 1) = (1 + a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$; $N(0) = N0$
  - Spojitý případ: $N'(t) = (a - b) \cdot N(t) - c \cdot N(t)^2$; $N(0) = N0$

Modifikace modelu

- **Přeznačení koeficientů modelu:**
  - úživnost prostředí: $K = \left(\frac{a-b}{c}\right)$
  - vnitřní koeficient růstu $r = a - b$