# 10. Společenstva

## Bi3101 Úvod do matematického modelování

### Lotkův-Volterrův systém

### Maticové populační modely

IBA MU

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita

*J. Hřebíček, J. Kalina*

# Mezidruhové vztahy

| | | Vliv první populace na druhou | | |
|---|---|---|---|---|
| | První populace je vůči druhé | záporný | neutrální | kladný |
| Vliv druhé populace na první | záporný | konkurent (kompetice) | amenzál | kořist hostitel |
| | neutrální | | neutrál | |
| | kladný | predátor parazit | komenzál | mutuál (symbióza) |

# Společenstva 3 a více populací

- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojité) pro růst populace i:

$$N_i(t+h) = N_i(t) + r_i \cdot N_i(t) \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

- Vzájemné ovlivňování populací budeme modelovat tak, že růstový koeficient i-té populace $r_i$ závisí na velikostech všech populací tvořících společenstvo (včetně i-té), tedy:

$$r_i = r_i(N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_n),\ \mathrm{i} \in \{1, \dots, n\}$$

- Pokud budeme předpokládat lineární závislost:

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \cdot N_j$$

- půjde o systém tzv. Lotka-Volterrových rovnic.

# Společenstva 3 a více populací

- Interpretace koeficientů $a_i$, $b_{i,j}$ je následující:
  - $a_i$: vnitřní koeficient růstu i-té populace. Pokud
    $a_i > 0$, izolovaná i-tá populace by v daném prostředí rostla,
    $a_i < 0$, izolovaná i-tá populace by v daném prostředí vymírala.
  - $b_{i,i}$: síla vnitrodruhové konkurence nebo kooperace. Pokud
    $b_{i,i} < 0$, jedná se o vnitrodruhovou konkurenci, pokud
    $b_{i,i} > 0$, jedná se o vnitrodruhovou kooperaci.
  - $b_{i,j}$: síla vlivu j-té populace na růst i-té.

    $b_{i,j} > 0$ . . . j-tá populace je komensálem i-té,

    $b_{i,j} < 0$ . . . j-tá populace je amensálem i-té,

    $b_{i,j} = 0$ . . . j-tá populace je k i-té neutrální.

# Model konkurence tří populací

- $$N_1'(t) = N_1(t) \cdot \left(\alpha_1 + \beta_{1,1} \cdot N_1(t) + \beta_{1,2} \cdot N_2(t) + \beta_{1,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_2'(t) = N_2(t) \cdot \left(\alpha_2 + \beta_{2,1} \cdot N_1(t) + \beta_{2,2} \cdot N_2(t) + \beta_{2,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_3'(t) = N_3(t) \cdot \left(\alpha_3 + \beta_{3,1} \cdot N_1(t) + \beta_{3,2} \cdot N_2(t) + \beta_{3,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_1(0) = N0_1,$$
$$N_2(0) = N0_2,$$
$$N_3(0) = N0_3,$$
- Řešte model pro:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$
$$\beta_{1,1} = \beta_{2,2} = \beta_{3,3} = -0{,}01$$
$$\beta_{1,2} = \beta_{2,3} = \beta_{3,1} = -0{,}015$$
$$\beta_{2,1} = \beta_{3,2} = \beta_{1,3} = -0{,}003$$

# Model konkurence tří populací (1 predátor)

- $$N_1'(t) = N_1(t) \cdot \left(\alpha_1 + \beta_{1,1} \cdot N_1(t) + \beta_{1,2} \cdot N_2(t) + \beta_{1,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_2'(t) = N_2(t) \cdot \left(\alpha_2 + \beta_{2,1} \cdot N_1(t) + \beta_{2,2} \cdot N_2(t) + \beta_{2,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_3'(t) = N_3(t) \cdot \left(\alpha_3 + \beta_{3,1} \cdot N_1(t) + \beta_{3,2} \cdot N_2(t) + \beta_{3,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_1(0) = N0_1,$$
$$N_2(0) = N0_2,$$
$$N_3(0) = N0_3,$$

- Řešte model pro:

$$\alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 2;\ \alpha_3 = -1{,}5$$
$$\beta_{1,1} = \beta_{2,2} = -0{,}005; \beta_{3,3} = 0$$
$$\beta_{1,2} = -0{,}0001; \beta_{2,3} = -0{,}02;\ \beta_{3,1} = 0{,}03$$
$$\beta_{2,1} = -0{,}01; \beta_{3,2} = 0{,}002; \beta_{1,3} = -0{,}03$$