F3060 Kmity, vlny, optika - cvičení

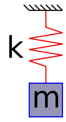
podzim 2022

D. Hemzal

hemzal@physics.muni.cz

A. KMITY

0.0 Uvažujte malé těleso o hmotnosti m, zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti k. Souřadnice x nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Určete protažení pružiny způsobené tíhovým polem $\vec{g}$ Země.



$[\Delta x = -mg/k]$

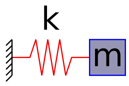
0.1 Ukažte, že hmotný bod podrobený konzervativní síle bude v přiblížení malých výchylek vykonávat harmonické oscilace kolem rovnovážné polohy x_0; uvažujte jednorozměrný případ. Frekvenci kmitů určete. (Nápověda: využijte skutečnosti, že konzervativní síly lze vždy vyjádřit pomocí potenciálu.)

$$\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{grad}U, U'(x_0) = 0; \omega_0^2 \doteq \frac{U''(x_0)}{m}\right]$$

0.2 Ukažte, že ve fázovém prostoru (q,p) opisuje (netlumený) hmotný bod v poli harmonické síly elipsu. (Nápověda: využijte skutečnosti, že při netlumeném pohybu se celková energie zachovává.)

$$\left[T + V = p^2/(2m) + kq^2/2\right]$$

1. **Volné kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m připevněné k nehmotné pružině o tuhosti k, která je na druhém konci pevně uchycena. Uvažujte pouze pohyb ve směru pružiny, tíhové pole Země zanedbejte.



- Sestavte pohybovou rovnici uvažovaného oscilátoru se započtením odporu prostředí ($\vec{F}_o = -\beta\dot{x}$, $\beta \geq 0$). Pohybovou rovnici řešte s využitím ansatzu $x = \exp(\lambda t)$, nalezněte její obecné řešení a stanovte frekvenci ω_T tlumených kmitů.

$$\left[\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}; \quad x = A\exp\left(\frac{-\beta t}{2m}\right)\sin(\omega_T t + \phi),\ \omega_T^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}\right]$$

- Diskutujte možné typy pohybu závaží a porovnejte frekvenci kmitů ω_T podkriticky tlumeného závaží s případem oscilátoru netlumeného.

$$\left[\beta^2 - 4mk > 0\text{: aperiodický tlumený pohyb,}\ \ \beta^2 - 4mk < 0\text{:}\ \ \omega_\mathrm{T}^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2} \leq \omega_0\right]$$

1.1 Určete integrační konstanty pro netlumený oscilátor s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$ a $\dot{x}(0) = v_0$.

$$\left[x = A\sin(\omega t + \phi_0); \tan\phi_0 = \frac{x_0}{v_0/\omega}, A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right]$$

1.2 U netlumených kmitů s frekvencí $f = 25$ Hz byla v čase $t_1 = 0$ s pozorována výchylka $x_1 = 56$ mm a v čase $t_2 = 10$ ms výchylka $x_2 = -33$ mm. Určete amplitudu kmitů a fázovou konstantu (fázi v $t = 0$ s).

$$[A\cos(\omega t + 30°30'), A = 65 \text{ mm}]$$

1.3 Malé závaží o hmotnosti $m = 100$ g je zavěšeno na pružině o tuhosti $k = 20$ N/m. Celá soustava je umístěna v odporujícím prostředí se silou odporu $F_o = -b\dot{x}$, $b = 1$ Ns/m. Nalezněte výchylku a rychlost závaží v čase $t = 0.05$ s, víte-li, že na počátku mělo závaží výchylku $x(0) = 20$ mm a bylo v klidu.

$$[x(0.05\text{ s}) = 15.6\text{ mm}, \dot{x}(0.05\text{ s}) = -2.6\text{ mm/s}]$$

1.5 *Matematické kyvadlo.* Uvažujte malé závaží o hmotnosti m zavěšené na nehmotném pevném lanku délky l v tíhovém poli $\vec{g}$ Země. Pro případ volného pohybu závaží ve svislé rovině nalezněte pohybovou rovnici pro úhlovou výchylku φ kyvadla. Nalezněte frekvenci kyvadla v aproximaci malých výchylek.

$$\left[\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0;\ \ \omega^2 \doteq \frac{g}{l}\right]$$

1.6∗ *Parametrické oscilace.* Ukažte, že houpačku je možné rozhoupat (vhodným) kýváním nohou. Konkrétně uvažujte model matematického kyvadla s časově závislou frekvencí vlastních kmitů $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t)x =$

0: zvedání a spouštění nohou periodicky mění polohu těžiště a tím délku závěsu; tento efekt lze shrnout do uvedené periodické modulace vlastní frekvence houpačky. Uvažujte modulaci s malou hloubkou, $h \ll 1$, a ukažte, že při přibližně dvojnásobné frekvenci modulace, $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$ dochází k exponenciálnímu rozkmitu houpačky.

2. **Nucené kmity.** Uvažujte malé těleso o hmotnosti m, zavěšené na nehmotné pružině o tuhosti k. Souřadnice x nechť směřuje svisle vzhůru, stranový pohyb neuvažujte. Uvažujte odpor prostředí ($\vec{F} = -\beta\dot{x}$, $\beta \geq 0$), tíhové pole Země zanedbejte. Těleso nechť je podrobeno budící síle $F\sin(\Omega t)$.

- Ukažte, že pro $t \to \infty$ hraje roli pouze partikulární řešení soustavy.
- Předpokládejte partikulární řešení ve tvaru $x_\mathrm{p} = A\sin(\Omega t + \Phi)$ a určete jeho volné konstanty A, Φ.

$$\left[A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2\beta^2}{m^2}}}, \tan\Phi = -\frac{\Omega\beta/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

- Nalezněte rezonanční frekvenci Ω_r, tedy frekvenci, při které těleso dosahuje největších výchylek pro dané F; velikost A_max rezonanční amplitudy vypočtěte.

$$\left[\Omega_\mathrm{r}^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}, A_\mathrm{max} = \frac{F/\beta}{\omega_\mathrm{T}} \right]$$

- Načrtněte závislost $A(\Omega)$ pro dvě různé hodnoty $\beta_2 \gg \beta_1$ a na vodorovné ose vyznačte vztah Ω_r, ω_T a ω_0. Jako pomocnou veličinu pro konstrukci grafu určete pološířku $\Omega_{1/2}$ z podmínky $A(\Omega_{1/2}) = A_\mathrm{max}/2$.

$$\left[\Omega_{1/2}^2 = \Omega_\mathrm{r}^2 \pm \sqrt{3}\frac{\beta}{m}\omega_\mathrm{T} \right]$$

2.1 Závaží se pohybuje pod vlivem potenciálu $V(x) = V_0\cosh(x/a)$, kde V_0 a a jsou konstanty. Nalezněte rovnovážnou polohu x_0 závaží a ukažte, že frekvence malých kmitů kolem této polohy se shoduje s frekvencí volných kmitů závaží, připevněného na pružinu o tuhosti V_0/a^2.

$$[x_0 = 0]$$

2.2* Uvažujte tlumený oscilátor buzený obecnou periodickou silou $F(t)$. Rozviňte $F(t)$ do Fourierovy řady a s využitím linearity pohybové rovnice ukažte, že jejím řešením je trajektorie $x(t) = \sum_j (\alpha_j c_j(t) + \beta_j s_j(t))$, kde α_j a β_j jsou konstanty a c_j a s_j jsou (po řadě) řešení rovnic s pravými stranami obsahujícími $\cos(\omega_j t)$ a $\sin(\omega_j t)$.

3. **Složené kmity.** Uvažujte nezávislé oscilace $x = A_x\sin(\omega_x t + \phi_x)$, $y = A_y\sin(\omega_y t + \phi_y)$ v rovině xy.

- Vyloučením času z obou rovnic nalezněte možné polarizační stavy světla, víte-li, že Maxwellovy rovnice připouští nejobecněji řešení $\omega_x = \omega_y$; bez újmy na obecnosti předpokládejte $\phi_y = 0$.

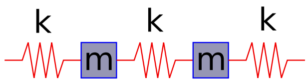
$$\left[\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\cos\phi_x + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = \sin^2\phi_x \right]$$

- Nalezněte obecnou rovnici *Lissajousovy křivky* pro případ soudělných frekvencí $\omega_x = 2\omega_y$; bez újmy na obecnosti předpokládejte $\phi_y = 0$. Diskutujte speciální případy $\phi_x = 0$ a $\phi_x = \pi/2$ ve zjednodušeném případě $A_x = A_y = 1$.

$$\left[\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{y^2}{A_y^2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\left(1 - 2\frac{y^2}{A_y^2}\right)\sin\phi_x = \cos^2\phi_x \right]$$

3.1* *Chaos.* Nalezněte rovnice popisující pohyb dvojitého kyvadla. Pro jednoduchost předpokládejte spojená dvě identická matematická kyvadla, umožňující pouze rovinný pohyb. Získané rovnice nemají analytické řešení - pohyb koncového bodu je chaotický, jak se lze přesvědčit numerickou simulací.

4. **Vázané kmity.** Uvažujte sadu N stejných malých závaží o hmotnosti m, spojených lineárně identickými nehmotnými pružinami o tuhosti k;



předpokládejte pohyb pouze ve směru pružin. Počátky souřadnic $x[i]$, popisujících výchylky jednotlivých závaží umístěte do rovnovážných poloh příslušných závaží.

- Pro $N{=}3$ sestavte pohybové rovnice soustavy pro případ, že koncová závaží jsou a) volná, b) uchycena k pevným stěnám dvěma dalšími pružinami týchž vlastností, c) podrobena periodické okrajové podmínce $x[i{+}3]{\equiv}x[i]$.
$$\left[m\ddot{\mathbf{x}}{=}k\begin{pmatrix}-1 & 1 & \\ 1 & -2 & 1\\ & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}, m\ddot{\mathbf{x}}{=}k\begin{pmatrix}-2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1\\ & 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}, m\ddot{\mathbf{x}}{=}k\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}\right]$$
- Sestavte pohybové rovnice předchozího příkladu s využitím potenciálu.
$$\left[U{=}\frac{1}{2}k(x[1]{-}x[2])^2{+}\frac{1}{2}k(x[2]{-}x[3])^2{+}\frac{1}{2}k(x[3]{-}x[1])^2\right]$$
- Za předpokladu $N{=}2$ a pružného uchycení koncových závaží k vnějším pevným stěnám vyřešte pohybové rovnice využitím ansatzu $x[i]{=}A_i\exp(\lambda t)$; nalezněte přípustné frekvence kmitů soustavy a jim odpovídající výchylky závaží.
$$\left[\omega^2{=}k/m, A_1{=}A_2;\ \ \omega^2{=}3k/m, A_1{=}{-}A_2\right]$$

4.1∗ Pohybové rovnice soustavy N hmotných bodů s hmotnostmi m_i v aproximaci elastického pole vedou na zobecněný problém vlastních hodnot $\mathbf{K}\mathrm{x}{=}\lambda\mathbf{M}\mathrm{x}$, $\dim K{=}\dim M{=}3N$, kde $\mathbf{K}$ je matice silových konstant a $\mathbf{M}$ je matice hmotností (diagonální matice se ztrojenými hmotnostmi). Ukažte, že pohybové rovnice lze převést na standardní problém vlastních hodnot $\tilde{\mathbf{K}}\mathrm{q}{=}\lambda\mathrm{q}$ transformací $\mathrm{q}_i{=}\sqrt{\mathbf{M}_{ii}}\mathrm{x}_i$.

5. Aplikace

5.1 *RLC obvod.* Sestavte druhý Kirchhofův zákon pro RLC obvod, buzený střídavým napětím $-U_0\cos(\omega t)$.

- Ukažte, že časová závislost průběhu proudu v RLC obvodu odpovídá tlumenému buzenému oscilátoru. Které ze součástek jsou zodpovědné zá útlum v idealizovaném a reálném RLC obvodu?
$$\left[U_r{=}RI, U_l{=}L\dot{I}, U_c{=}Q/C\right]$$
- Vyřešte rovnici nabíjení a vybíjení kondenzátoru.
[]
- Využitím předpokladu $I{=}A\sin(\omega t{+}\Phi)$ řešte rovnici RLC obvodu a vysvětlete, jak může být RLC obvod použit coby přijímací anténa radiového vysílání.
$$\left[A{=}U_0/\sqrt{\frac{1}{\left(\omega L{-}\frac{1}{\omega C}\right)^2}{+}R^2},\ \ \tan\Phi{=}\frac{R}{\omega L{-}\frac{1}{\omega C}}\right]$$

5.1.1 Nalezněte vztah pro vlastní frekvenci RLC obvodu a určete její hodnotu pro praktický příklad: 400 závitů měděného drátu o průměru 0.063 mm na magnetické pásce 4mm x 13mm ($L{=}450\ \mu$H), kondenzátor 47 pF a odpor 1,5 kΩ.
$$\left[\omega_0{=}1/\sqrt{LC}, f{=}1\ 094\ \text{kHz}\right]$$

5.1.2∗ Využitím předpokladu harmonického kmitání nalezněte frekvenční charakteristiku RC obvodu.
[]

5.2 *Molekuly.*

- Určete tuhost vazby intersticiálního kyslíku ^{16}O v křemíku, víte-li že vibruje na frekvenci $f{=}$ 33,2 THz. Na jaké frekvenci bude vibrovat ve stejné pozici izotop ^{18}O, předpokládáme-li, že tuhost vazby se nezmění?
$$\left[k{=}1156\ \text{kg s}^{-2}, \omega_{18}/\omega_{16}{=}\sqrt{8/9}\right]$$
- Potenciální energie HCl má průběh
$$V(r){\doteq}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{B}{r^9}.$$

S využitím příkladu 0.1 odhadněte vlnočet $1/\lambda$ vibrací této molekuly. Rovnovážná délka vazby H-Cl je r_0=0,13 nm, pro výpočet použijte redukovanou hmotnost μ molekuly.

$$\left[V'(r_0){=}0{:}B{=}r_0^8e^2/(36\pi\varepsilon_0),\omega^2{=}V''(r_0)/\mu{:}1/\lambda{=}3790/\text{cm}\right]$$