$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}\,dx$$

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

Pohyb je finitní (kmitavý periodický!); perioda = doba, za kterou projde objekt ⇄ polohy x_m do x_M a zpět

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_m(E)}^{x_M(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

Periodu tedy můžeme určit, aniž řešíme pohybovou rovnici – řešení pohybové rovnice může být v obecném případě velmi obtížné

⊛ HARMONICKÁ APROXIMACE
(viz za příkladem (6))

PŘÍKLADY

(1) HARMONICKÝ POHYB. $F(x) = -kx \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

POHYBOVÁ ROVNICE JE LINEÁRNÍ

Řešení pohybové rovnice v tomto případě umíme najít

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \quad x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

Jsou jím harmonické kmity s kruhovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, tj. periodou

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ nezávislou na E

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2m}{E}}\sqrt{\frac{2E}{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}A$$

A je určeno podmínkou $\dot{x}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = E \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2E}}A = 1$

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

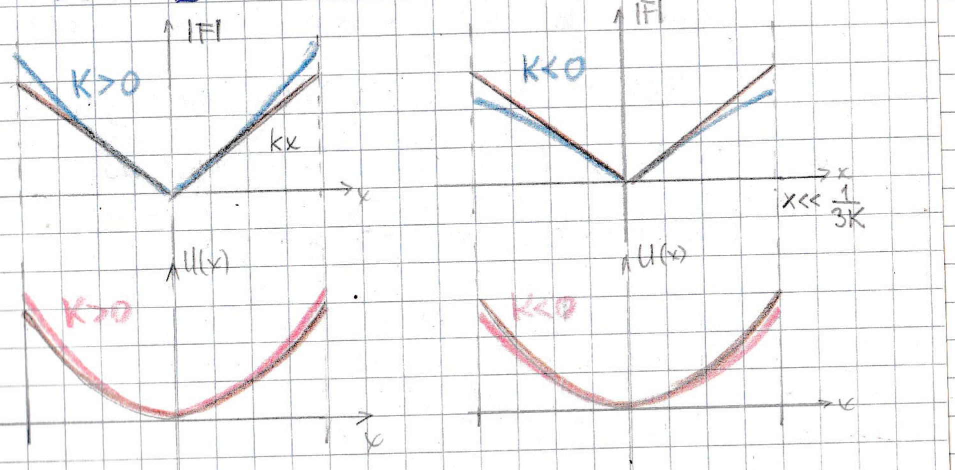
(2) ANHARMONICKÝ POHYB   POHYBOVÁ ROVNICE JE NELIN.

$$F(x) = -kx + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots \quad \sim -kx\left[1 - \frac{k_2}{k}x - \frac{k_3}{k}x^2\right]$$

Uvažme pro jednoduchost případ, že nelinearita síly je způsobena kubickou opravou, tj. položme $k_2 = 0$. Síla je pak lichou funkcí x, potenciál sudou:

$$F(x) = -\left[1 + Kx^2\right]kx \qquad K = -k_3/k$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kKx^4 = \left[1 + \frac{1}{2}Kx^2\right]\cdot\frac{1}{2}kx^2$$



pružina při velkých výchylkách „tuhne"

pružina při velkých výchylkách „měkne"

[pro $x = \pm\frac{1}{3K}$ má F extrém, U inflexi]

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x\left[1+Kx^2\right] = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x\left[1+Kx^2\right] = 0$$

Řešení $x(t)$ musí mít tyto vlastnosti:

(a) PERIODICITA $\quad x(t) = x(t+T) \quad ! \; T \neq T_0$

FINITNÍ POHYB Je tedy možno je hledat ve tvaru Fourierova rozvoje:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$$

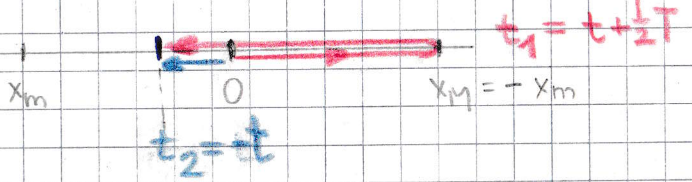
(b) Vzhledem k symetrii síly a potenciálu se jedná o kmitavý pohyb kolem nuly $\Rightarrow a_0 = 0$

(c) Zvolme poč. podmínku $\dot{x}(0) = 0$. Pak vyjde $b_n = 0$ pro $\forall n$ (v čase 0 je v krajní poloze)

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots$$

(d) Vzhledem k symetrii síly (a potenciálu) je

$$x(t + \tfrac{1}{2}T) = x(-t) = -x(t)$$



Tuto podmínku však nesplňují sudé násobky základní frekvence:

$$\cos 2\omega(t+\tfrac{1}{2}T) = \cos 2\omega t \cos \omega T - \sin 2\omega t \underbrace{\sin \omega T}_{0} = \cos 2\omega t$$
$$\neq -\cos 2\omega t$$

Definitivně tedy hledáme x ve tvaru

$$x(t) = a_1\left[\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t + \dots\right] \qquad \varepsilon = \frac{a_3}{a_1} \ll 1$$

$\dots \rightarrow$ zanedb.

Dosadíme do pohybové rovnice a zanedbáme členy s vyššími mocninami ε:

$$-\omega^2 a_1\left[\cos \omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t\right] + \omega_0^2 a_1\left[\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t\right] \cdot$$
$$\cdot\left[1 + Ka_1^2\left(\cos^2 \omega t + 2\varepsilon \cos \omega t \cos 3\omega t\right)\right] = 0$$

$$-\omega^2 a_1\left[\cos \omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t\right] + \omega_0^2 a_1\left[\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t\right] +$$
$$+ \omega_0^2 K a_1^3 \cos^3 \omega t + \omega_0^2 \underbrace{K a_1^3 (3\varepsilon}_{K\varepsilon \,\dots\, \text{malé velič. 2.ř.}} \cos^2 \omega t \cos 3\omega t) = 0$$

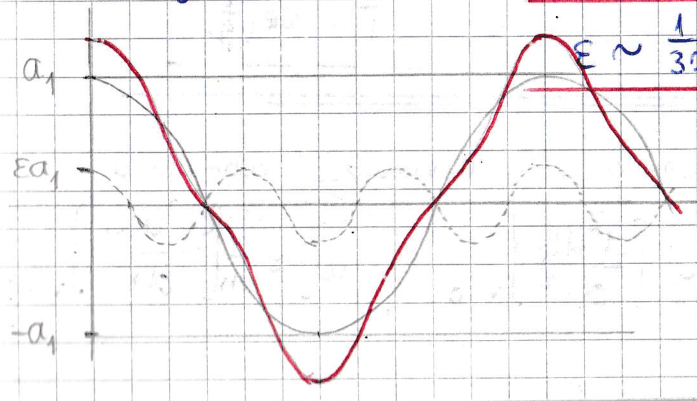
$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4}\cos \omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

Koef. u $\cos \omega t$: $\quad -\omega^2 a_1 + \omega_0^2 a_1 + \frac{3}{4}\omega_0^2 K a_1^3 = 0$

— " — $\cos 3\omega t$: $\quad -9\omega^2 \varepsilon a_1 + \omega_0^2 a_1 \varepsilon + \frac{1}{4}\omega_0^2 K a_1^3 = 0$

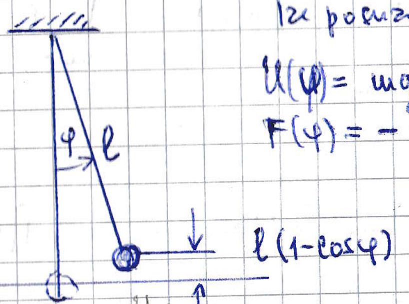
$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}Ka_1^2\right) \Rightarrow \quad \omega \sim \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}Ka_1^2\right)$$

$$\varepsilon \sim \frac{1}{32}Ka_1^2$$



(3) ANHARMONICKÝ POHYB – MATEMATICKÉ KYVADLO

závěs nemění délku ⇒ 1 stup. volnosti ⇒ lze posuzovat jako jednorozměrný pohyb

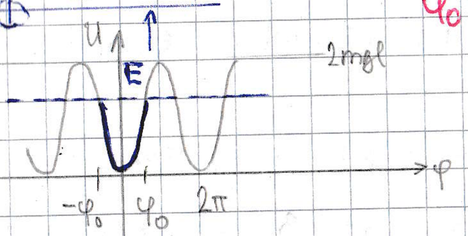


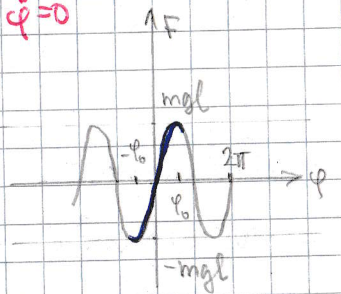
$U(\varphi) = mg\ell(1-\cos\varphi) = 2mg\ell \sin^2\frac{\varphi}{2}$

$F(\varphi) = -mg\ell\sin\varphi$

$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2mg\ell\sin^2\frac{\varphi}{2} = E$

$\varphi_0 \ldots \dot{\varphi} = 0$





$$T(E) = \ell\sqrt{2m}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{E-2mg\ell\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \pm\sqrt{\frac{E}{2mg\ell}}$; pro $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$

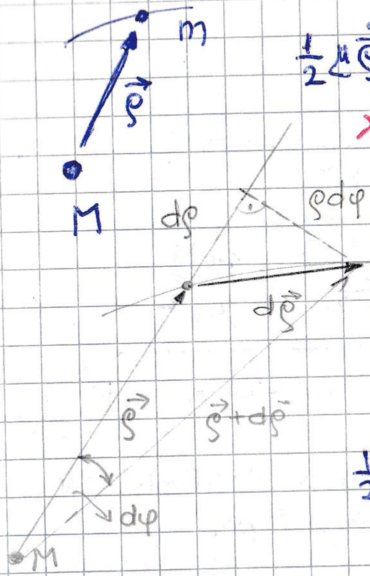
(harmonická aproximace) vyjde známý vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Při malých výchylkách … harmonická aproximace

„TUHOST" $\sim \left[\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right]_{x=0}$ $\qquad \omega_0^2 \approx \frac{1}{m}\left[\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right]_{x=0}$

(4) POHYB V CENTRÁLNÍM POLI – KEPLEROVA ÚLOHA



$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{\varrho}}^2 + U(\varrho) = E \qquad \mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$

$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2$

$d\varrho \equiv d|\vec{\varrho}| \neq |d\vec{\varrho}|$!

$[d\vec{\varrho}]^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2$

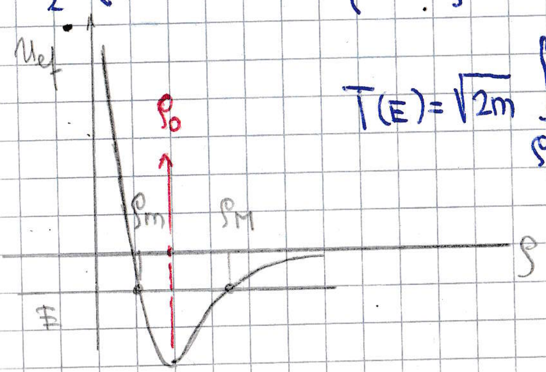
$\dot{\vec{\varrho}}^2 = \left[\frac{d\vec{\varrho}}{dt}\right]^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2$

$\frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\varrho^2\dot{\varphi}^2 + U(\varrho)}_{U_{ef}} = E$

$L = m\varrho^2\omega = m\varrho^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{m^2\varrho^4}$

$\frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 + \underbrace{\left[U(\varrho) + \frac{L^2}{2m\varrho^2}\right]}_{U_{ef}(\varrho)} = E$ … rovnice pro jednorozm. pohyb popsaný souřadnicí „ρ" s efektivním potenciálem $U_{ef}(\varrho)$

$\frac{1}{2}m\dot{\varrho}^2 = E - \left[\frac{L^2}{2m\varrho^2} - \frac{\varkappa mM}{\varrho}\right]$



$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{\varrho_m}^{\varrho_M}\frac{d\varrho}{\sqrt{E-\left[\frac{L^2}{2m\varrho^2} - \frac{\varkappa mM}{\varrho}\right]}}$$

⇒ 3. KEPLERŮV ZÁKON