Cvičení z termodynamiky a statistické fyziky

1. Nechť $F(x,y) = xe^y$. Spočtěte $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial^2 F/\partial x^2$, $\partial^2 F/\partial x\partial y$, $\partial^2 F/\partial y\partial x$, $\partial^2 F/\partial x^2$.

2. Buď $\mathrm{d}\omega = A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y$ libovolná diferenciální forma (Pfaffián). Ukažte, že v případě, že $\mathrm{d}\omega$ je úplný diferenciál (existuje funkce $F(x,y)$ tak, že $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}F$), musí platit

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad\qquad \text{b)} \qquad \oint \mathrm{d}\omega = 0,$$

(b) pro každou uzavřenou integrační cestu.

3. Buď $\mathrm{d}\omega_1 = (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Je to úplný diferenciál, je $\mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}\omega_1/x^2$ úplný diferenciál? Vypočtěte integrál $\int \mathrm{d}\omega$ mezi body (1,1) a (2,2) podél přímek $(1,1) \to (1,2) \to (2,2)$ a $(1,1) \to (2,1) \to (2,2)$.

4. Je $\mathrm{d}\omega = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$ úplný diferenciál? Pokud ano, určete funkci F jejímž úplným diferenciálem je $\mathrm{d}\omega$. Spočtěte integrál $\int \mathrm{d}\omega$ mezi body (V_1, p_1) a (V_2, p_2) podél přímek $(V_1, p_1) \to (V_1, p_2) \to (V_2, p_2)$ a $(V_1, p_1) \to (V_2, p_1) \to (V_2, p_2)$.

5. Je $\mathrm{d}Q = c\mathrm{d}T + R\frac{T}{V}\mathrm{d}V$ úplný diferenciál? Spočtěte integrál $\int \mathrm{d}\omega$ mezi body (V_1, T_1) a (V_2, T_2) podél přímek $(V_1, T_1) \to (V_1, T_2) \to (V_2, T_2)$ a $(V_1, T_1) \to (V_2, T_1) \to (V_2, T_2)$. Jakou funkcí $f(V,T)$ musíme $\mathrm{d}Q$ vynásobit, aby součin $f\mathrm{d}Q$ byl úplným diferenciálem? Určete funkci S pro níž $\mathrm{d}S = f\mathrm{d}Q$. c a R jsou konstanty.

6. x, y a z jsou 3 stavové veličiny, spojené stavovou rovnicí $f(x,y,z) = 0$. Ukažte platnost vztahů

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1}, \qquad\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

a

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$$

přičemž dolní index označuje konstantní veličinu a w je další stavovou veličinou, $w = w(x,y,z)$.

7. Stavová rovnice $pV = NkT$ váže proměnné p, V a T, přičemž N a k jsou konstanty. Přímým výpočtem ověřte, že $(\partial p/\partial V)_T = (\partial V/\partial p)_T^{-1}$, $(\partial p/\partial T)_V = (\partial T/\partial p)_V^{-1}$, $(\partial p/\partial V)_T = -(\partial p/\partial T)_V(\partial T/\partial V)_p$, $(\partial T/\partial V)_p = -(\partial T/\partial p)_V(\partial p/\partial V)_T$.

8. Stavová rovnice ideálního plynu může být zapsána jako $pV = NkT$, $pV = n_l RT$, $p = \rho kT/\mu$, $p = nkT$, kde p, V, T jsou tlak, objem a teplota, N je počet částic, n jejich koncentrace, k je Boltzmannova konstanta ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,K^{-1}}$), R je plynová konstanta ($R = 8,31\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$), n_l je látkové množství, ρ je hustota plynu a μ molekulová hmotnost. Uvěřte rozměr k a R. Jaký rozměr má n? Ukažte, že jednotlivé rovnice jsou ekvivalentní ($N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$).

9. Při konstantní teplotě 20° C se ideální plyn kvazistaticky rozpíná ze stavu s tlakem 20 atm do stavu s tlakem 1 atm. Jakou práci vykoná 1 mol plynu?

10. Při kvazistatické adiabatické expanzi 6 litrů hélia o teplotě 350K klesá tlak ze 40 atm na 1 atm. Vypočtěte výsledný objem a teplotu (předpokládejte platnost stavové rovnice ideálního plynu). Získané výsledky srovnejte s hodnotami, které by vyšly pro izotermickou expanzi ($\kappa = 1,63$). Předpokládejte, že se jedná o ideální plyn.

11. Spočtěte práci vykonanou ideálním plynem při kvazistatické adiabatické expanzi ze stavu charakterizovaného p_1, V_1 do stavu p_2, V_2. Určete práci, kterou plyn vykoná, přechází-li z počátečního do koncového stavu nejdříve izochorickým dějem a poté izobarickým, nebo nejdříve izobarickým dějem a poté izochorickým.

12. Při výměně vzduchu mezi spodními a horními vrstvami troposféry dochází k expanzi, popř. kompresi vzduchu: stoupající vzduch se rozepíná v oblasti menšího tlaku. Vzhledem k malé tepelné vodivosti vzduchu je možno pokládat procesy expanze a komprese za adiabatické. Vypočtěte změnu teploty s výškou následkem těchto procesů. (Vzduch považujte za ideální plyn.)

13. Plyn je popsán stavovou rovnicí $p = p(V,T)$. Ukažte přímým výpočtem, že δQ není úplným diferenciálem.

14. Energie částice uzavřené v nekonečně vysoké potenciálové jámě s rozměry $L_x \times L_y \times L_z$ je dána vztahem

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2 \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right).$$

Předpokládejte, že $L_x = L_y = L_z = L$. Předpokládejte, že systém jako celek je charakterizován energií systému. Jak je určen mikrostav, jak makrostav? Spočtěte sílu, kterou částice působí na stěny nádoby. Určete vztah energie systému a tlaku.

15. Odvoďte z existence stavové rovnice $f(p,V,T) = 0$ vztah

$$\alpha = p \cdot \beta \cdot \kappa$$

mezi termickým koeficientem roztažnosti $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, koeficientem izochorické rozpínavosti $\beta := \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ a koeficientem izotermické kompresibility $\kappa := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

16. Stavová rovnice má tvar $p = f(V) \cdot T$. Dokažte:

a) $$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$$

b) pokud platí a), pak $\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T = 0.$

17. Pro ideální plyn spočtěte $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{ad}}$, $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{T}}$.

18. Ukažte, že pro plyn popsaný stavovou rovnicí $f(p,V,T)=0$ platí
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{ad}} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{T}} \frac{c_p}{c_V}.$$

19. Ukažte platnost relace $c_p - c_V = R$ (Mayerova relace) mezi izobarickým a izochorickým specifickým teplem jednoho molu ideálního plynu. Vnitřní energie ideálního plynu nezávisí na jeho objemu.

20. Ukažte platnost relace $pV^\kappa =$ konst. ($\kappa = c_p/c_V$ je adiabatickým exponentem) v kvazistatickém adiabatickém procesu ideálního plynu. Spočtěte κ za předpokladu, že $c_V = \frac{3}{2}R$.

21. Vypočtěte entropii ideálního plynu při $c_p =$konst., $c_V =$konst. Ukažte, že δQ není úplný diferenciál.

22. Pro plyn bylo experimentálně zjištěno, že součin tlaku a objemu je funkcí pouze teploty, $pV = f(T)$ a že vnitřní energie závisí také pouze na teplotě. Co je o takovém plynu možno říci z hlediska termodynamiky?

23. Spočtěte entropii pole záření, platí-li pro tlak záření a hustotu záření vztahy $p = \frac{1}{3}u$, $u = \sigma T^4$, kde σ je konstanta. Spočtěte rovnici izotermy a adiabaty.

24. Pro plyn popsaný stavovou rovnicí $p = p(V,T)$ najděte vztah mezi $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{ad}}$ a $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{T}}$.

25. Tyč je zkroucena momentem síly M o úhel φ. Najděte vztah mezi $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{adiab}}$ a $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{izoterm}}$.

26. a) 1 kg vody s teplotou 0°C je přiveden do tepelného kontaktu s velkým rezervoárem s teplotou 100°C. Spočtěte změnu entropie vody, rezervoáru a celé soustavy po ustavení rovnováhy.
b) Spočtěte změnu entropie celé soustavy, pakliže voda byla nejprve v kontaktu s rezervoárem s teplotou 50° a poté s rezervoárem s teplotou 100°C.
c) Jak zajistit, aby se při ohřevu vody entropie soustavy nezměnila?

27. Van der Waalsova stavová rovnice pro 1 mol plynu má tvar $(p+\frac{a}{V^2})(V-b) = RT$, kde a, b jsou konstanty. Pro dané T může mít křivka dva extrémy dané rovnicí $(\partial p/\partial V)_T = 0$. V kritickém bodě určeném parametry T_c, p_c a V_c navíc platí $(\partial^2 p/\partial V^2)_T = 0$. Spočtěte hodnoty T_c, p_c a V_c. Zapište stavovou rovnici pomocí proměnných $T' = T/T_c$, $p' = p/p_c$ a $V' = V/V_c$.

28. Určete vnitřní energii a entropii Van der Waalsova plynu a vypočtěte:
a) práci Van der Waalsova plynu při vratné izotermické expanzi,
b) změnu teploty Van der Waalsova plynu při adiabatické expanzi do vakua.

29. Hustota vnitřní energie $u = U/V$ je funkcí jen teploty T, stavová rovnice je $p = \frac{1}{3}\, u(T)$. Určete tvar funkce $u(T)$.

30. Ukažte, že pro malé odchylky $\delta\rho$, δp od rovnovážných hodnot hustoty ρ_0 a tlaku p_0 je možné šíření zvukových vln popsat vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2},$$

kde rychlost zvuku je dána vztahem $c = \sqrt{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_{\mathrm{ad}}}$ předpokládáme-li, že děje jsou natolik rychlé, že nedochází k výměně tepla mezi jednotlivými elementy vzduchu. Ukažte, že rychlost zvuku může být spočtena také jako $c = \sqrt{\kappa_{\mathrm{ad}}/\rho_0}$, kde adiabatická kompresibilita $\kappa_{\mathrm{ad}} := -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\mathrm{ad}}$. Spočtěte rychlost zvuku ve vzduchu za předpokladu, že vzduch je tvořen pouze molekulami N_2 a že $\kappa = c_p/c_V = 7/5$.

31. Ukažte, že termický koeficient roztažnosti

$$\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

splňuje relaci

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\,\alpha.$$

32. Ukažte, že specifické teplo při konstantním tlaku, c_p, a při konstantním objemu, c_V, splňují vztah

$$c_p - c_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T.$$

33. Volná energie systému $F(V,T) = -\frac{1}{3}\cdot\mathrm{const}\cdot VT^4$. Určete jeho tlak, vnitřní energii, entropii, entalpii a Gibbsův potenciál.

34. Ideální plyn se adiabaticky rozšiřuje z objemu V_1 do vakua. Spočtěte růst entropie, pokud plyn v konečném stavu má objem V_2 a dokažte, že proces rozšiřování je nevratný.

35. Jouleův-Thomsonův děj (Jouleův-Thomsonův koeficient $\lambda = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$).
a) Ukažte, že $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$ a $\lambda = \frac{V}{C_p}(1 - T\alpha_p)$.
$\alpha_p := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ je koeficientem izobarické roztažnosti.
b) Ukažte, že

$$\lambda = \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}{C_p\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

c) Ověřte, že $\lambda = 0$ pro klasický ideální plyn.
d) Ukažte, že pro Van der Waalsův plyn platí

$$\lambda = \frac{bp + \frac{3ab}{V^2} - \frac{2a}{V}}{\left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}\right) \cdot C_p}.$$

e) Vyjádřete rovnici inverzní křivky, která v $p-V$ diagramu představuje rozhraní mezi oblastí $\lambda > 0$ a $\lambda < 0$ pro případ Van der Waalsova plynu.

36. Vypočtěte účinkový koeficient Carnotova cyklu (1. izotermická expanze, $T_2 =$ konst, 2. adiabatická expanze, $S =$ konst, 3. izotermická komprese, $T_1 =$ konst, 4. adiabatická komprese, $S =$ konst) pro ideální plyn pomocí jeho stavové rovnice.

37. Vypočtěte účinkový koeficient následujícího cyklu ideálního plynu. Může tento proces být vedený vratně?
1. izotermická expanze $T_2 =$ konst
2. izochorické ochlazení $V_2 =$ konst
3. izotermická komprese $T_1 =$ konst
4. izochorické ohřívání $V_1 =$ konst.

38. Určete účinkový koeficient (idealizovaného) Ottova motoru, který pracuje s ideálním plynem o specifickém teple $c_V = \frac{5}{2}R/\text{mol}$ při kompresním poměru 10:1.
1. adiabatická komprese,
2. izochorické ohřívání (=spálení paliva),
3. adiabatická expanze (vykonání práce),
4. ochlazení (=výfuk horkého plynu, nový, studený plyn je nasátý).

39. Dieselův cykl se skládá z těchto částí:
1. adiabatické komprese atmosférického vzduchu,
2. spálení vstříknuté směsi a izobarické expanze,
3. adiabatické expanze
4. a izochorického ochlazení.
Určete účinkový koeficient cyklu v závislosti na kompresním poměru pro ideální plyn.

40. Jaká je celková změna entropie, když smícháme 2 kg vody o teplotě 363 K adiabaticky a při konstantním tlaku s 3 kg vody o teplotě 283 K? ($c_p = 4184\,\text{J/K kg}$)

41. Chladnička může za hodinu přeměnit 10 litrů vody o 0°C v led o téže teplotě. K tomu se musí odevzdat skupenské teplo $Q = 800$ kcal ($= 800 \times 1,163$ Wh) do vzduchu ($27,3$°C). Jaký nejmenší příkon musí chladnička mít?

42. Dokažte, že pro $T \to 0$ neexistuje systém popsatelný $pV = \text{const}\cdot T$.

43. Uzavřený systém se skládá ze dvou jednoduchých podsystémů, které jsou oddělené pohyblivou stěnou, která umožňuje
a) jen výměnu tepla,
b) jak výměnu tepla, tak výměnu hmoty,

c) ani výměnu tepla, ani výměnu hmoty.
Jaké jsou odpovídající podmínky rovnováhy?

44. Dvě stejná množství ideálního plynu se stejnou teplotou T a různými tlaky p_1, p_2 jsou od sebe oddělena přepážkou. Určete změnu entropie následkem smíšení obou plynů.

45. Určete maximální práci, kterou lze získat při sloučení stejných množství téhož ideálního plynu se stejnou teplotou T_0 (a různými objemy popř. tlaky).

46. Molární objem vody $v^{(2)} = 18\,\mathrm{cm^3/mol}$, molární objem ledu je o 9.1% větší (při tlaku $10^5\,\mathrm{Pa}$), molární hmotnost vody je $18\,\mathrm{g/mol}$. Latentní teplo tání ledu je $330\,\mathrm{kJ/kg}$. Spočtěte změnu bodu tání při změně tlaku.

47. Odvoďte tvar Maxwellova-Boltzmannova rozdělení rychlostí molekul plynu. Vycházejte pouze z předpokladu, že prostor je izotropní a že pohyb molekul plynu v jednotlivých směrech je nezávislý.

48. Rozdělení hybností atomů je dáno Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením

$$P(p) = C \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right).$$

Nalezněte hodnotu C.

49. Za předpokladu platnosti Maxwellova-Boltzmannova rozdělení rychlostí molekul plynu spočtěte $\langle p_x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\sqrt{\Delta E^2}$ a nejpravděpodobnější velikost hybnosti. Spočtěte pravděpodobnost toho, že $p_z > 0$.

50. Při změně magnetizace M o $\mathrm{d}M$ vykoná systém práci $\mathrm{d}W = -H\,\mathrm{d}M$, kde H je intenzita magnetického pole. (Jde o práci vykonanou jednotkovým objemem; objem $V = \text{konst.} = 1$.) Určete rozdíl tepelných kapacit $c_H - c_M$ při konstantním poli H a při konstantní magnetizaci.

51. Určete rovnici adiabaty izotropního magnetika.