

Elektronová optika a mikroskopie

Paraxiální aproximace

Tomáš Radlička

26. 10. 2020

Ústav přístrojové techniky, AV ČR, v.v.i.

1. Rovnice trajektorie
2. Paraxiální rovnice trajektorie pro osově symetrické systémy

Rovnice trajektorie

Rovnice trajektorie jako extramála optické dráhy

Index lomu je tvaru

$$n = \left(\frac{\varphi^*}{\varphi_0^*} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} - \sqrt{-\frac{q}{2m\varphi_0^*}} (A_z + A_x x' + A_y y') \quad (1)$$

trajektorie dostaneme jako extrémály funkcionálu optické dráhy

$$\delta \int_{z_0}^{z_i} n(\mathbf{q}(z), \mathbf{q}'(z), z) dz = 0 \quad (2)$$

$$0 = \int_{z_0}^{z_i} \delta n(\mathbf{q}, \mathbf{q}', z) dz = \int_{z_0}^{z_i} (n(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \mathbf{q}' + \delta \mathbf{q}', z) - n(\mathbf{q}, \mathbf{q}', z)) dz = \quad (3)$$

$$= \int_{z_0}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q}' \right) dz = \int_{z_0}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}'} \right) \delta \mathbf{q} dz + \left[\frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q} \right]_{z_0}^{z_i}$$

Rovnice trajektorie jsou Euler - Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}'} = 0 \quad (4)$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = -e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (5)$$

Přejdeme na parametrizaci delkou oblouku trajektorie $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$,
 $ds = |d\mathbf{r}| = \mathbf{v}dt$, $\frac{d}{dt} = v\frac{d}{ds}$

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = -\frac{e}{v}\mathbf{E}(\mathbf{r}, s) - e\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{B} \quad (6)$$

dále použijeme

$$\nabla\varphi^* = \nabla(\varphi(1 + e\varphi/2mc^2)) = \nabla\varphi(1 + e\varphi/mc^2) = \gamma\nabla\varphi = -\gamma\mathbf{E} \quad (7)$$

$$\nabla g = \sqrt{2em}\nabla\varphi^*{}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2em}\frac{\nabla\varphi^*}{\varphi^*{}^{\frac{1}{2}}} = me\frac{\nabla\varphi^*}{g} = \frac{e}{\gamma v}\nabla\varphi^* \quad (8)$$

Čímž dostaneme:

$$\frac{d}{ds}\left(g\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla g - e\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{B} \quad (9)$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

Přejdeme na parametrizaci polohou podél optické osy $\mathbf{r}(z) = (x(z), y(z), z)$,

$$\rho = |\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}, \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{\mathbf{g}}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = \nabla g - \frac{e}{\rho} \mathbf{r}' \times \mathbf{B} \quad (10)$$

třetí rovnice :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{g}{\rho} \right) = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho} \mathbf{e}_z (\mathbf{r}' \times \mathbf{B}) \quad (11)$$

je závislá na prvních dvou rovnicích, ale lze ji použít pro zjednodušení rovnice trajektorie

$$\frac{\mathbf{g}}{\rho^2} \mathbf{r}'' = \nabla g - \mathbf{r}' \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho} (\mathbf{r}' \times \mathbf{B} - (\mathbf{e}_z (\mathbf{r}' \times \mathbf{B})) \mathbf{r}') \quad (12)$$

po několika triviálních úpravách dostaneme:

$$x'' = \frac{\rho^2}{g} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - x' \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \frac{e\rho^2}{g} (y' B_t - \rho B_y) \quad (13)$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{g} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - y' \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \frac{e\rho^2}{g} (-x' B_t + \rho B_x) \quad (14)$$

kde $B_t = (B_z + x' B_x + y' B_y)/\rho$

Nebo pomoci relativisticky korigovaného potenciálu

$$x'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*} \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} - x \frac{\partial\varphi^*}{\partial z} \right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}} (\rho B_y - y' B_t) \quad (15)$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*} \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi^*}{\partial z} \right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}} (-\rho B_x + x' B_t) \quad (16)$$

Paraxiální rovnice trajektorie pro osově symetrické systémy

- Paraxiální aproximace je lineární aproximace rovnice trajektorie
- Přibližně platí v blízkosti optické osy (musí být i malé směrnice trajektorií...)
- Abychom dostali z Eulerových Lagrangeových rovnic lineární rovnici trajektorie stačí nám polynom do druhého řádu v souřadnicích x , y , x' , y'

V minulé přednášce jsme odvodili elektromagnetické pole ve tvaru

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)r^2 + \frac{1}{64}\Phi^{(4)}(z)r^4 + \dots \quad (17)$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B(z)y + \frac{1}{16}B''(z)y(x^2 + y^2) + \dots \quad (18)$$

$$A_y = \frac{1}{2}B(z)x - \frac{1}{16}B''(z)x(x^2 + y^2) + \dots \quad (19)$$

Po dosazení do vztahu pro index lomu dostaneme:

$$n = \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} (x'^2 + y'^2) - \frac{\gamma\Phi''}{8\Phi_0^{*\frac{1}{2}}\Phi_0^{*\frac{1}{2}}}(x^2 + y^2) - \frac{\eta B}{2\Phi_0^{*\frac{1}{2}}}(xy' - x'y) \quad (20)$$

Po dosazení do Eulerových Lagrangeových rovnic dostaneme:

$$x'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}x' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}x + \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}y' + \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}y = 0 \quad (21)$$

$$y'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}y' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}y - \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}x' - \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}x = 0 \quad (22)$$

Jedná se lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Koeficienty jsou funkcí nezávislé proměnné, rovnice nejsou separované. Pro další úpravy je vhodné přejít do komplexních souřadnic $w = x + iy$:

$$w'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}w' + \frac{\gamma\Phi''}{4\Phi^*}w - i\frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}}w' - i\frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}}w = 0 \quad (23)$$

Lze ukázat, že po transformaci $w = e^{i\theta(z)}u$, kde $\theta' = \eta B/2\Phi^{*\frac{1}{2}}$ dostaneme rovnice v separovaném tvaru - Larmor rotating frame.

$$u'' + \frac{\gamma\Phi'}{2\Phi^*}u' + \frac{\gamma\Phi'' + \eta^2 B^2}{4\Phi^*}u = 0 \quad (24)$$