

# Diferenciální počet

M1030 Matematika pro biology

22. 11. 2021

## Derivace

Derivace funkce v bodě

Operace s derivacemi

Derivace jako funkce

Derivace elementárních funkcí

Příklady

# Derivace

# Derivace funkce v bodě

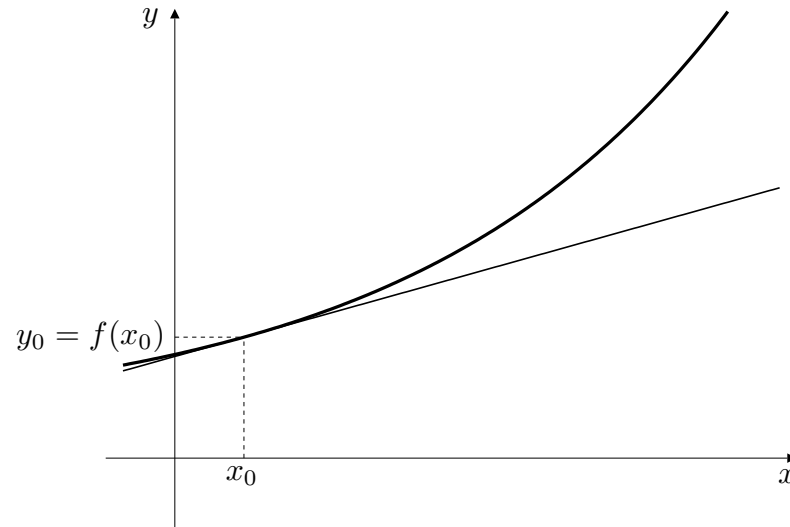
Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

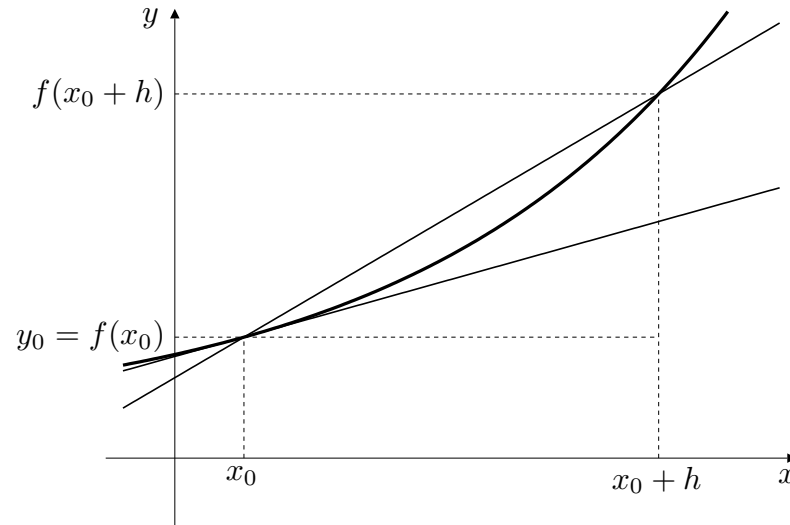
najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

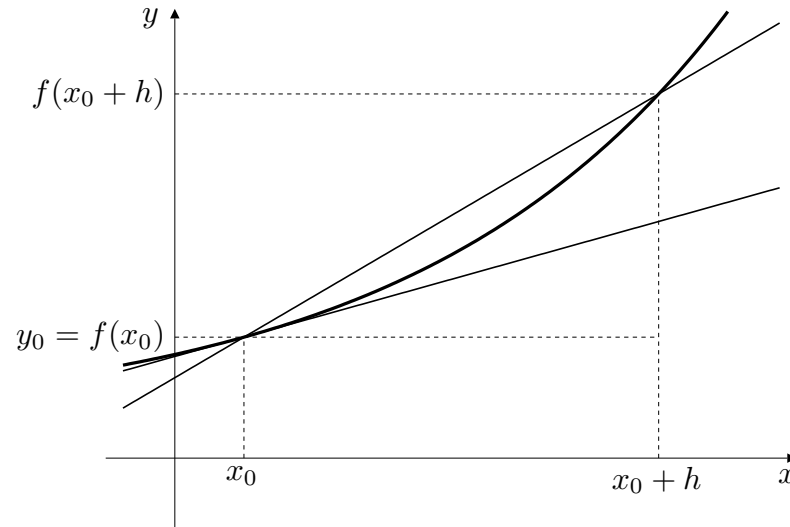
najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$

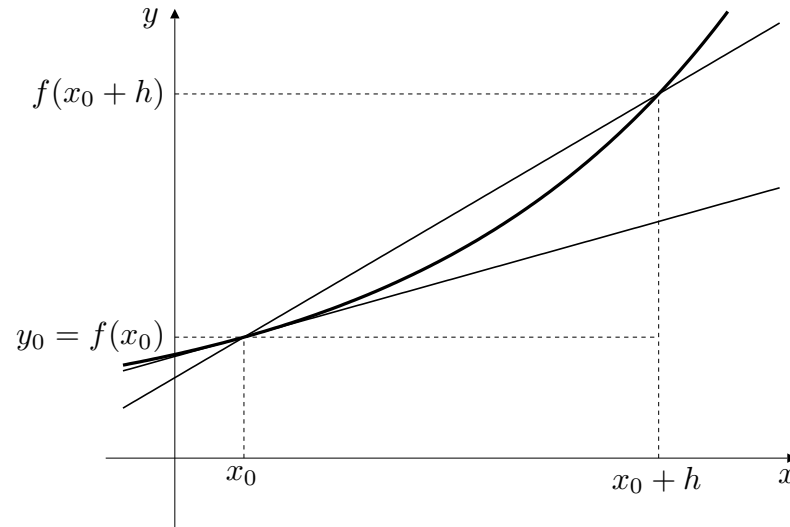


Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ : 
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



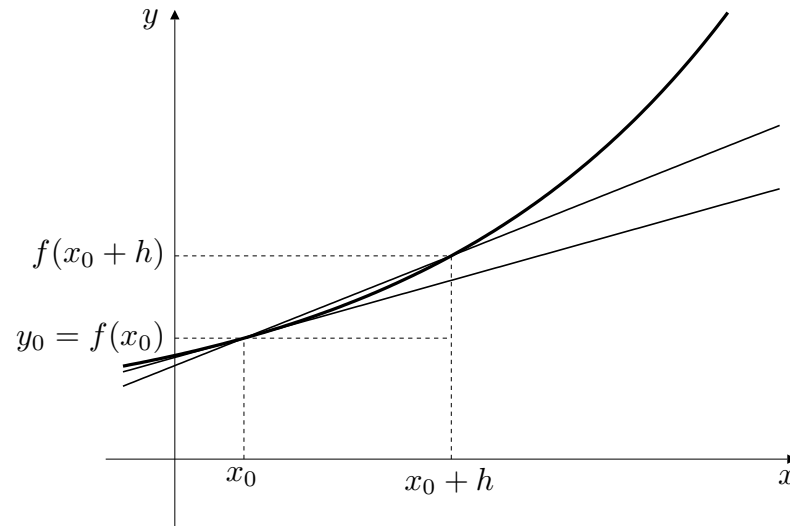
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

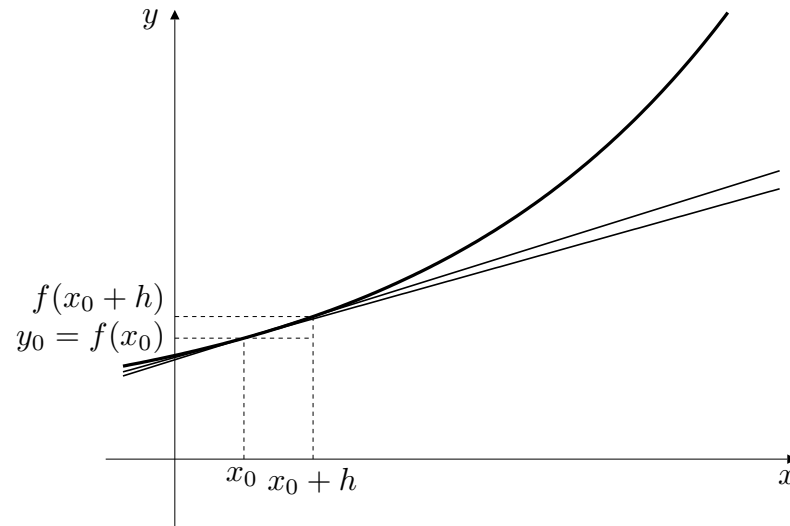
Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .



# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



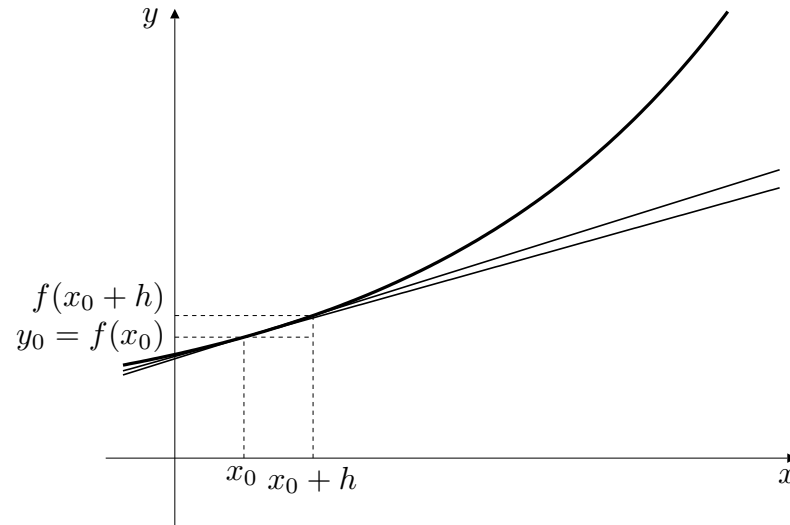
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ .

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



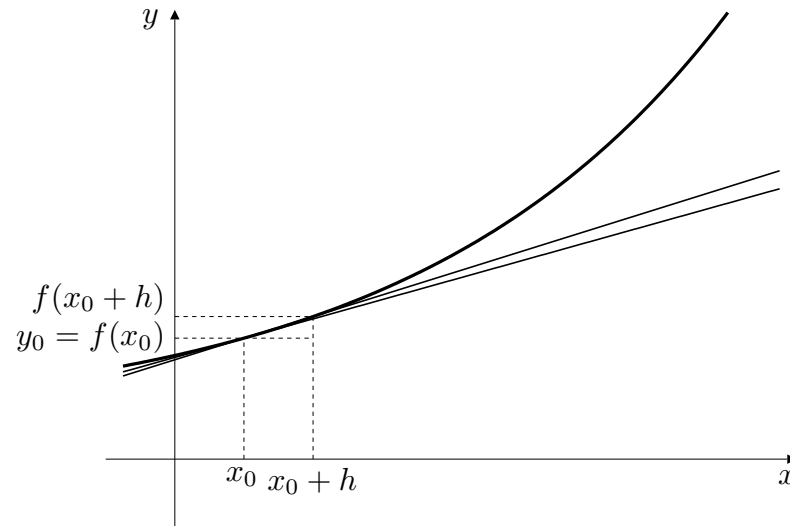
Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Pokud se  $h$  „přibližuje“ k 0, bod  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  se „přibližuje“ k bodu  $(x_0, f(x_0))$ . Nakonec tyto body splynou a sečna splyne s tečnou.

# Derivace funkce v bodě

Základní úloha diferenciálního počtu:

najít směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$



Směrnice sečny vedené body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ :  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Směrnice tečny je rovna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

# Derivace funkce v bodě

*Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je*

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

# Derivace funkce v bodě

*Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je*

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta y_0$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1,$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Rovnice tečny:  $y - 1 = 2(x - 1)$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Příklad:** Napište rovnici tečny k parabole dané rovnicí  $y = x^2$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Rovnice tečny:  $y = 2x - 1$

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

**Poznámky:**

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.

# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

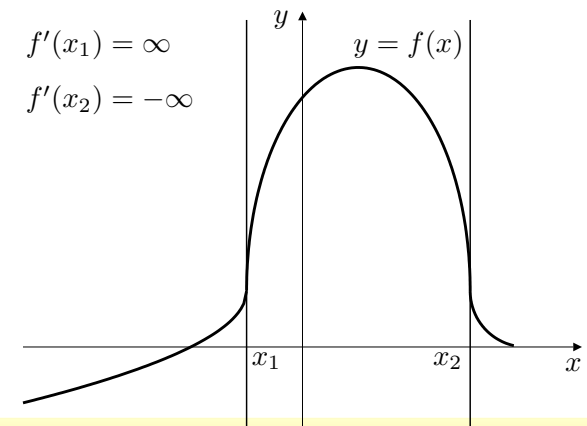
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.



# Derivace funkce v bodě

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

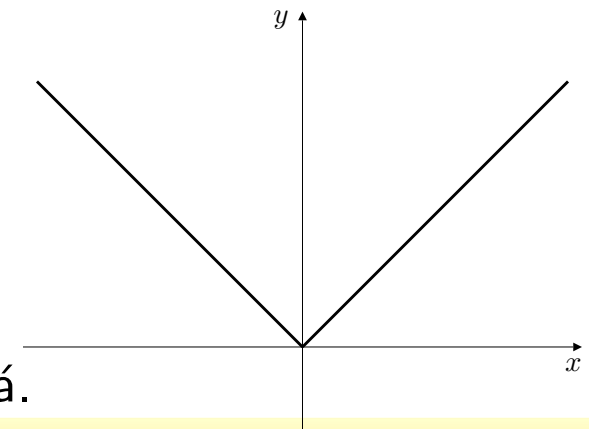
Alternativní označení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

## Poznámky:

- Funkce má v bodě nejvýše jednu derivaci.
- Derivace může být nevlastní.
- Funkce je spojitá bodě, v němž má vlastní derivaci.
- Funkce nemusí mít vlastní derivaci v bodě, v němž je spojitá.



# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + h) - cf(x_0)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$



# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \right) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)\end{aligned}$$

# Operace s derivacemi

Nechť existují derivace  $f'(x_0)$ ,  $g'(x_0)$ ,  $\varphi'(x_0)$ ,  $f'(\varphi(x_0))$

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.



# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

Analogicky lze z funkce  $f'$  odvodit funkci  $f''$ . Nazveme ji *druhá derivace funkce  $f$* .

# Derivace jako funkce

Bud'  $f$  funkce. Definujeme funkci

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve všech bodech definičního oboru funkce  $f$ , ve kterých existuje uvedená limita.

Tato  $f'$  funkce je odvozena – derivována – z funkce  $f$ , nazývá se *(první) derivace funkce  $f$* .

Analogicky lze z funkce  $f'$  odvodit funkci  $f''$ . Nazveme ji *druhá derivace funkce  $f$* .

Stejně tvoříme derivaci třetí, čtvrtou, pátou ...,  $f'''$ ,  $f^{(4)}$ ,  $f^{(5)}$  ...

# Derivace elementárních funkcí

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :

$$f(x) = \ln x$$

$$e^{f(x)} = x \quad | \prime$$

$$e^{f(x)} f'(x) = 1$$

$$x f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x$ :

$$(a^x)' = \left( e^{x \ln a} \right)' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a:$

$$(x^a)' = \left( e^{a \ln x} \right)' = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$ :  $f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c$ :  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n$ :  $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x$ :  $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x$ :  $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x$ :  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a$ :  $f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x$ :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x + \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\sin \frac{1}{2}h\right)^2}{h} = \\ &= \cos x - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}h = \cos x - \sin x \cdot 1 \cdot 0 = \cos x\end{aligned}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x:$

$$f'(x) = (\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x:$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

- $f(x) = \operatorname{tg} x:$

$$f'(x) = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$

- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$

- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$

- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$

- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$

- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

- $f(x) = \operatorname{cotg} x:$

$$f'(x) = (\operatorname{cotg} x)' = \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)' = -\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^2} = -\frac{1}{(\cos x)^2} \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = c: f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n: f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x: f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x: f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = a^x: f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \log_a x: f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = x^a: f'(x) = ax^{a-1}$
- $f(x) = \sin x: f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x: f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x: f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x: f'(x) = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :

$$f(x) = \arcsin x$$

$$\sin f(x) = x \quad |'$$

$$f'(x) \cos f(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin f(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

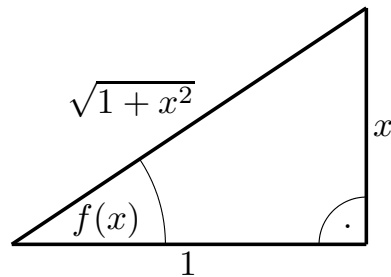
- $f(x) = \operatorname{arctg} x:$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{tg} f(x) = x \quad |'$$

$$f'(x) \frac{1}{(\cos f(x))^2} = 1$$

$$f'(x) = (\cos f(x))^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 = \frac{1}{1+x^2}$$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2})$ :

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}):$

$$f'(x) = \frac{1}{x \pm \sqrt{1+x^2}} \left( 1 \pm \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{(x \pm \sqrt{1+x^2}) \sqrt{1+x^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x$ :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ :  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ :  $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2})$ :  $f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}:$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}: f'(x) = \left(\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\right)' =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

- $f(x) = \arcsin x: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x: f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x: f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x: f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \ln(x \pm \sqrt{1+x^2}): f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}: f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

# Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln(1 \pm \sqrt{1+x^2})$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$



# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left( \frac{3x - 2}{x^3 - 8} \right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left( \frac{3x - 2}{x^3 - 8} \right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x-2}{x^3-8}\right)' = \frac{3(x^3-8) - (3x-2)3x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5\frac{1}{x} + 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$



# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x - 2}{x^3 - 8}\right)' = \frac{3(x^3 - 8) - (3x - 2)3x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3 - 8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)'$$

# Příklady

$$(6x^3 - 2x^2 + 3x - 5)' = 6 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3x^0 - 0 = 18x^2 - 4x + 3$$

$$(3(x^2 - 2x + 1) - 5 \ln x + 2\sqrt{x})' = 3(2x - 2) - 5 \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 6x - 6 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$(3x^5 - 6(1 - 3x)^4)' = 15x^4 - 24(1 - 3x)^3(-3) = 15x^4 + 72(1 - 3x)^3$$

$$\left(\frac{3x-2}{x^3-8}\right)' = \frac{3(x^3-8) - (3x-2)3x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{3x^3 - 24 - 9x^3 + 6x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{-6x^3 + 6x^2 - 24}{x^6 - 16x^3 + 64}$$

$$\left(\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1}{x^2-1} \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{4x}{x^4-1}$$

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x^3}}\right)' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$

$$((\sin x)^x)' = (e^{x \ln \sin x})' = e^{x \ln \sin x} \left(\ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cotg x)$$