Diferenciální počet

M1030 Matematika pro biology

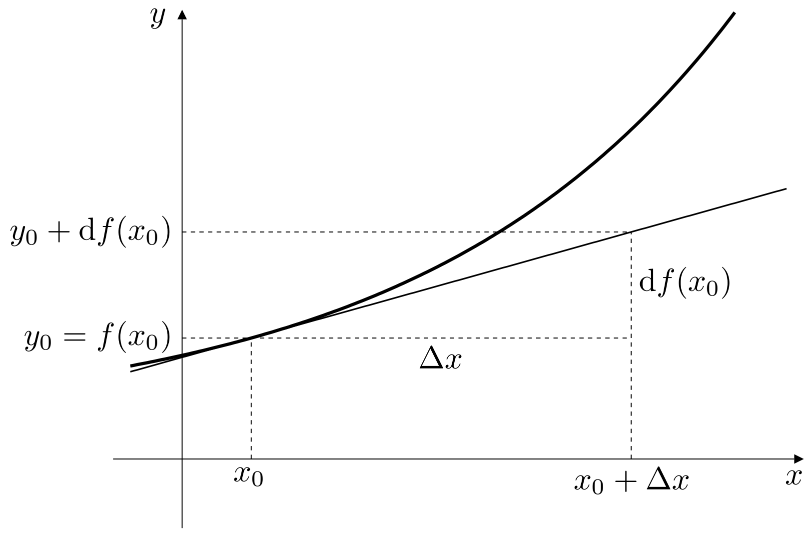
29. 11. 2022

Derivace

Diferenciál

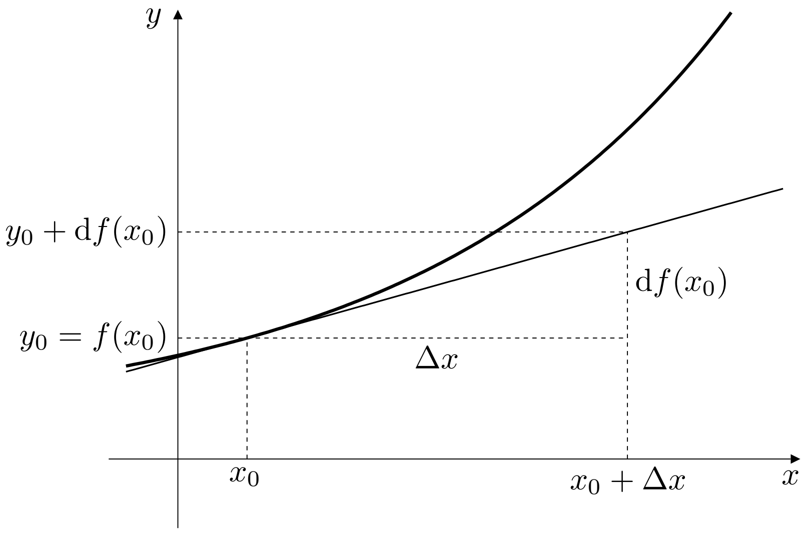
Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

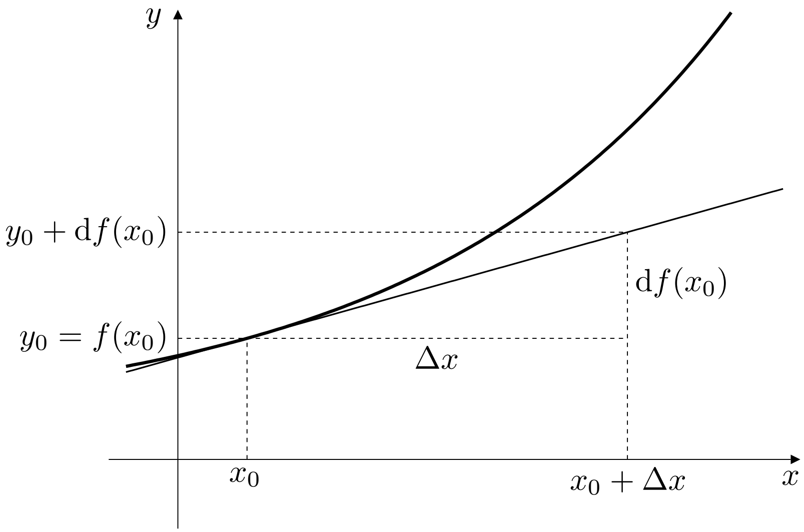
$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f *v bodě* x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

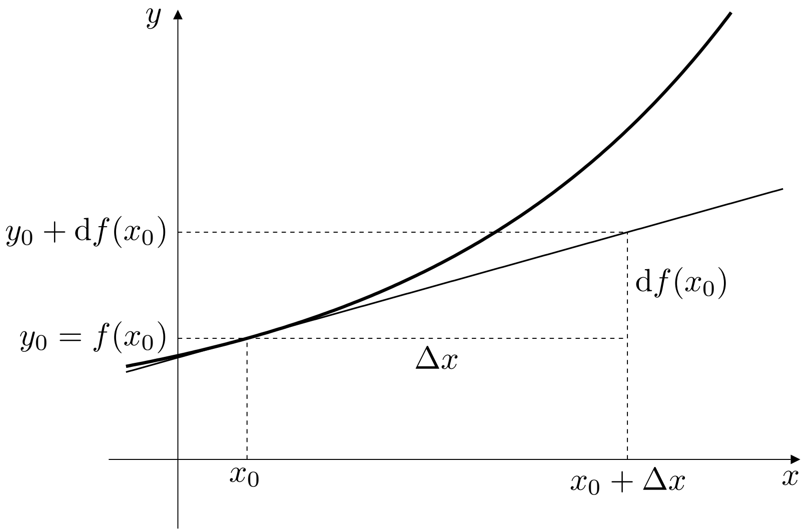
$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Diferenciál funkce f *v obecném bodě* x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f v bodě x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.



Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Diferenciál funkce f v obecném bodě x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci g danou předpisem $g(x) = x$ platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}g(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$.

Pojem diferenciálu

Diferenciál funkce f v bodě x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$: přírůstek funkce naměřený na tečně.

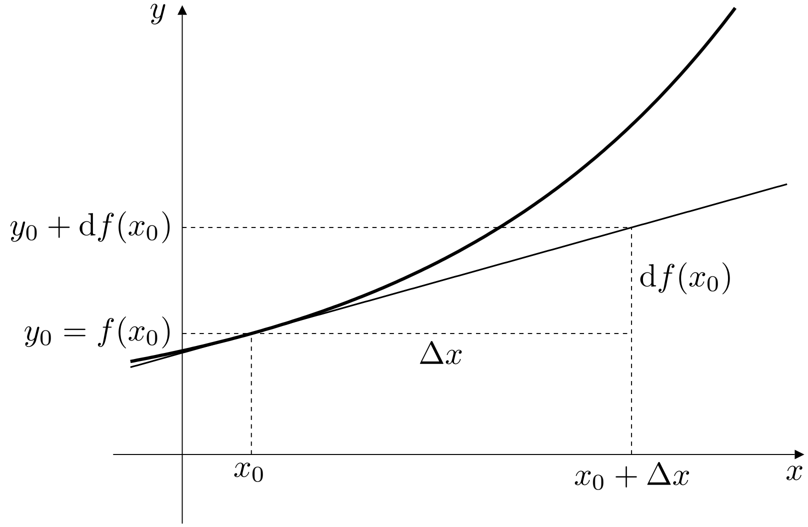
Platí:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

tj.

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$



Diferenciál funkce f v obecném bodě x:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$$

Pro funkci g danou předpisem $g(x) = x$ platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}g(x) = g'(x)\Delta x = \Delta x$.
Proto lze psát

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \quad \text{neboli} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75}\frac{3}{64} = \frac{126}{100} = 1{,}26$

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\sqrt[3]{2}$.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, $\sqrt[3]{2} = f(2)$,

$x_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $f(x_0) = \frac{5}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{75}$, $\Delta x = 2 - \frac{125}{64} = \frac{3}{64}$,

$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75}\frac{3}{64} = \frac{126}{100} = 1{,}26$

Přesná hodnota: $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}25992$.

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23{,}026} \doteq 0{,}957$

Užití diferenciálu

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady: Přibližně vypočítejte $\log_{10} 9$.

$f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$, $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,

$x_0 = 10$, $f(x_0) = \log_{10} 10 = 1$, $\Delta x = -1$,

$\log_{10} 9 = f(9) \approx 1 - \frac{1}{23{,}026} \doteq 0{,}957$

Přesná hodnota: $\log_{10} 9 \doteq 0{,}9542$.

Užití derivací

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Najděte tečnu k parabole dané rovnicí $y = 1 - (x - 1)^2$ v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Najděte tečnu k parabole dané rovnicí $y = 1 - (x - 1)^2$ v bodě $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

$f(x) = 1 - (x - 1)^2$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{3}{4}$,

$f'(x) = 0 - 2(x - 1) = 2 - 2x$, $f'(\frac{3}{2}) = 2 - 3 = -1$

$$y = \frac{3}{4} - (x - \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - x$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$$f'(x) = \pm\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad f'(x_0) = \mp\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\frac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2$$

Konstrukce tečen

Přímka, která má směrnici q a prochází bodem (x_0, y_0) má rovnici

$$y - y_0 = q(x - x_0).$$

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{tj. } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklady: Napište rovnici tečny ke kružnici dané rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v bodě (x_0, y_0).

$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; derivujeme obě strany této rovnosti.

$f'(x) = \pm\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-2x) = \mp\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f'(x_0) = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} = \mp\dfrac{x_0}{\sqrt{y_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0}$

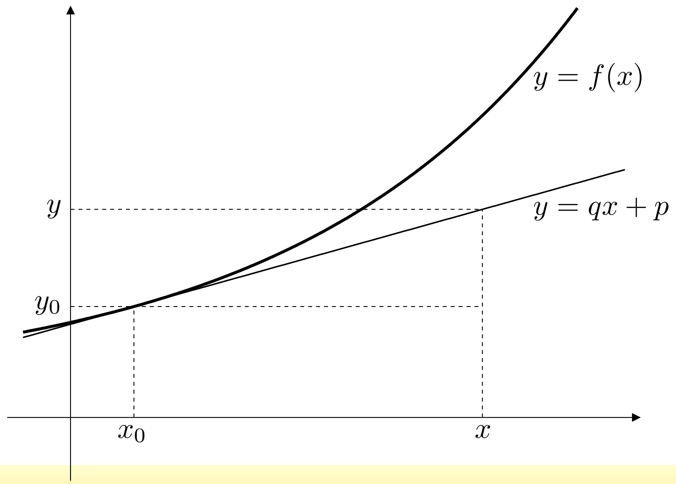
$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{y_0}(x - x_0)$

$$x_0 x + y_0 y = r^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p \qquad .$$



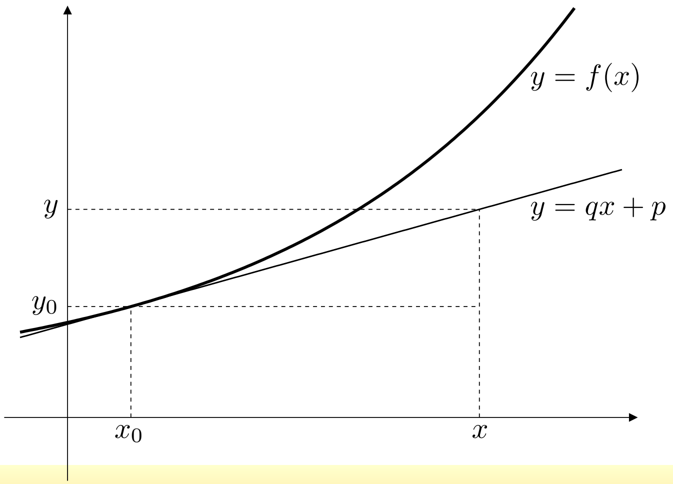
Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p \qquad\qquad\qquad .$$

Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$, tj.

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



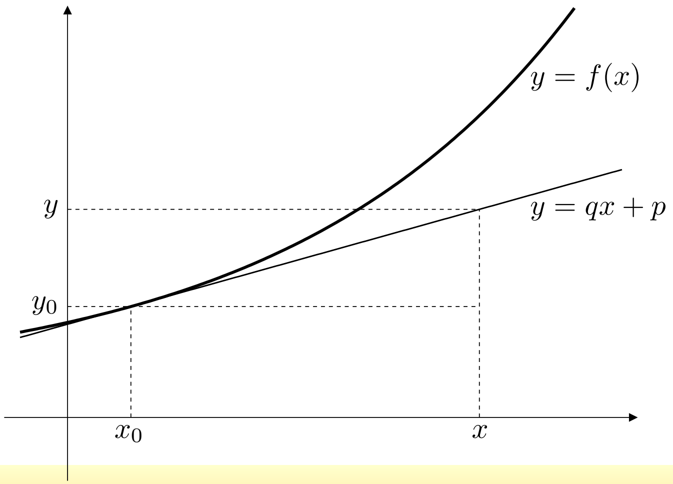
Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 lineární funkcí

$$y = qx + p = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

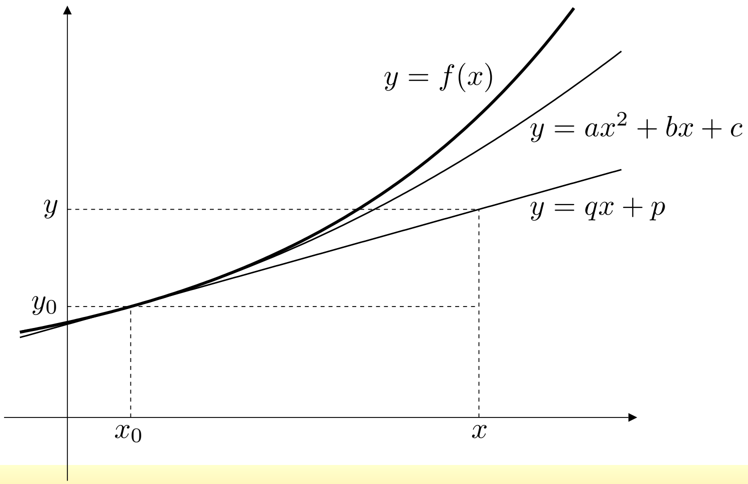
Graf funkce f nahradíme jeho tečnou v bodě $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big)$, tj.

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$



Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

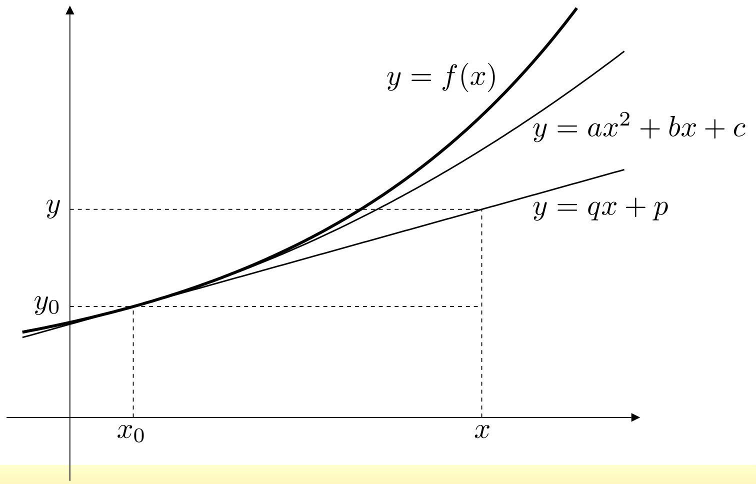


Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$



Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b &= f'(x_0) \\ 2a &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{array}{ll} ax_0^2 + b\,x_0 + c & = f(x_0) \\ 2ax_0 + b & = f'(x_0) \\ 2a & = f''(x_0) \end{array}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Řešení $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$, $b = f' - x_0 f''(x_0)$, $c = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_0^2 f''(x_0)$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Přitom požadujeme $f(x_0) = T_2(x_0)$, $f'(x_0) = T_2'(x_0)$, $f''(x_0) = T_2''(x_0)$, tj.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + b\,x_0 + c &= f(x_0) \\ 2ax_0 + b \qquad &= f'(x_0) \\ 2a \qquad\qquad &= f''(x_0) \end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé parametry a, b, c.

Řešení $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$, $b = f' - x_0 f''(x_0)$, $c = f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_0^2 f''(x_0)$

Tedy

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

$$\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 1$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2} \qquad -\frac{1}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^2} = -2$$

$$(\operatorname{cotg} x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3} \qquad 2\frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^3} = 4$$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: Funkci $y = \operatorname{cotg} x$ aproximujte v okolí bodu $x_0 = \frac{1}{4}\pi$ funkcí kvadratickou.

$$\operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{cotg}(\tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 1$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2} \qquad -\frac{1}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^2} = -2$$

$$(\operatorname{cotg} x)'' = 2\frac{\cos x}{(\sin x)^3} \qquad 2\frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{(\sin \frac{1}{4}\pi)^3} = 4$$

Tedy

$$\operatorname{cotg} x \approx 1 - 2(x - \tfrac{1}{4}\pi) + 2(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2$$

Aproximace funkcí

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: $\sqrt[3]{2}$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: $\sqrt[3]{2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = \frac{125}{64},\ f(x_0) = \frac{5}{4},\ x = 2, x - x_0 = \frac{3}{64},$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: $\sqrt[3]{2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = \frac{125}{64},\ f(x_0) = \frac{5}{4},\ x = 2, x - x_0 = \frac{3}{64},$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3},\ f'(x_0) = \frac{16}{75},\quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3},\ f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2\,048}{28\,125},$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: $\sqrt[3]{2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = \frac{125}{64},\ f(x_0) = \frac{5}{4},\ x = 2, x - x_0 = \frac{3}{64},$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3},\ f'(x_0) = \frac{16}{75}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3},\ f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2\,048}{28\,125},$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \cdot \frac{3}{64} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,048}{28\,125} \cdot \left(\frac{3}{64}\right)^2$$

Funkci $y = f(x)$ aproximujeme v okolí bodu x_0 kvadratickou funkcí

$$y = T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Příklad: $\sqrt[3]{2}$

$f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = \frac{125}{64},\ f(x_0) = \frac{5}{4},\ x = 2, x - x_0 = \frac{3}{64},$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3},\ f'(x_0) = \frac{16}{75}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3},\ f''(x) = -\frac{2}{9} \left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{2\,048}{28\,125},$

$$\sqrt[3]{2} = f(2) \approx \frac{5}{4} + \frac{16}{75} \cdot \frac{3}{64} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,048}{28\,125} \cdot \left(\frac{3}{64}\right)^2 = \frac{453\,571}{360\,000} \doteq 1{,}25992$$

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5 \cdot \frac{1}{10\,000} + \cdots$

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5 \cdot \frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5\cdot\frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x;

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5 \cdot \frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x;
platí pro $|x| < 1$.

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5 \cdot \frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x;
platí pro $|x| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5\cdot\frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x;
platí pro $|x| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4},\ldots$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 2,\ f'''(0) = 6,\ldots$$

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5\cdot\frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x; platí pro $|x| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4},\ldots$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 2,\ f'''(0) = 6,\ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots$$

Taylorův polynom

Motivace: $\pi = 3{,}141592654\cdots = 3 + \frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + 5\cdot\frac{1}{10\,000} + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

součet členů geometrické posloupnosti s nultým členem 1 a kvocientem x;
platí pro $|x| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\; f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\; f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\; f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \ldots$$

$$f(0) = 0,\; f'(0) = 1,\; f''(0) = 2,\; f'''(0) = 6, \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3$$

Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylorův polynom stupně n *se středem* x_0.

Taylorův polynom

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylorův polynom stupně n *se středem* x_0.

Příklad: Taylorův polynom funkce $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylorův polynom stupně n *se středem* x_0.

Příklad: Taylorův polynom funkce $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem $x_0 = 0$.

$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$, $f^{(i)}(0) = 1$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n$$

McLaurinův polynom stupně n

Obecně:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylorův polynom stupně n *se středem* x_0.

Příklad: Taylorův polynom funkce $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ se středem $x_0 = 0$.

$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$, $f^{(i)}(0) = 1$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

Limity neurčitých výrazů

Je-li $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ a $f(x) \neq 0 \neq g(x)$ na ryzím okolí bodu x_0, pak

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)},$$

tedy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Limity neurčitých výrazů

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\ln x}{\frac{1}{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x \to \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \ln x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\ln x}{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x}$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \& \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x \ln \frac{x+1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x^2}{x+1} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

De l'Hôpitalovo pravidlo: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x) \;\&\; \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Příklady:

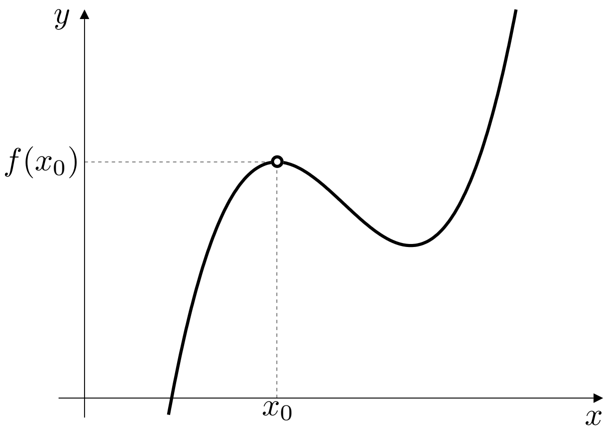
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\frac{x+1}{x}} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{x+1}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1$$

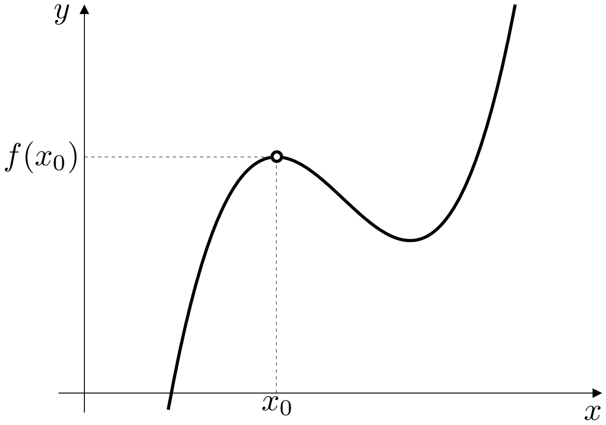
Extrémy funkcí:

Extrémy funkcí:
Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého lokálního maxima $f(x_0)$, pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu $f(x_0)$.



Extrémy funkcí:
Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního maxima* $f(x_0)$, pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu $f(x_0)$.

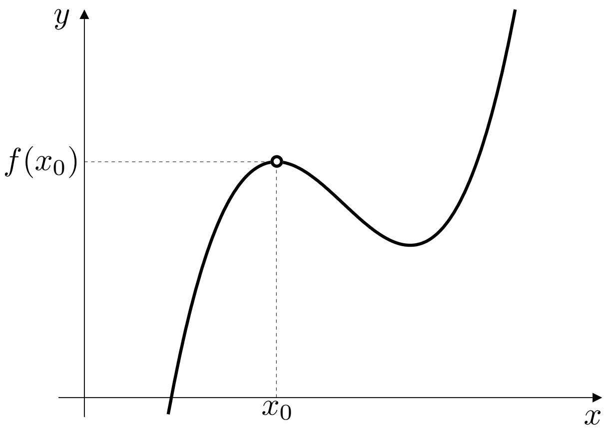
$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big) |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$



Extrémy funkcí:

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního maxima* $f(x_0)$, pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu $f(x_0)$.

$$\big(\exists\varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

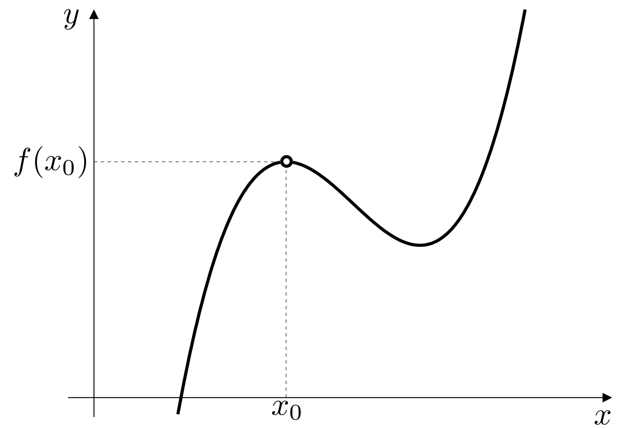


Extrémy funkcí:
Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního maxima* $f(x_0)$, pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí nepřevýší hodnotu $f(x_0)$.

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého ostrého lokálního maxima* $f(x_0)$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že každá funkční hodnota na tomto okolí je menší než $f(x_0)$.

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$



Průběh funkce

Extrémy funkcí:
Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního maxima* $f(x_0)$:

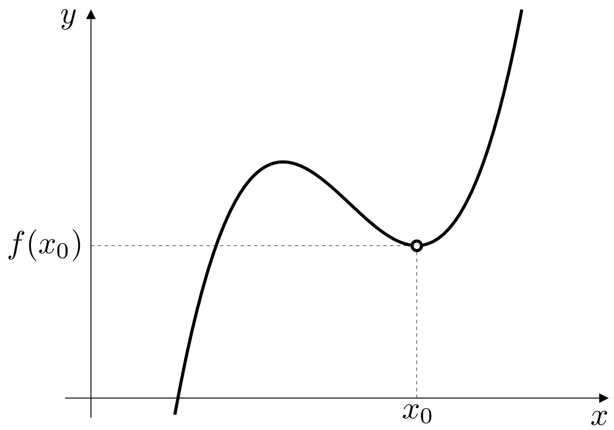
$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého ostrého lokálního maxima* $f(x_0)$:

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$

Extrémy funkcí: *Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého lokálního minima $f(x_0)$,* pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí neklesne pod hodnotu $f(x_0)$.

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$



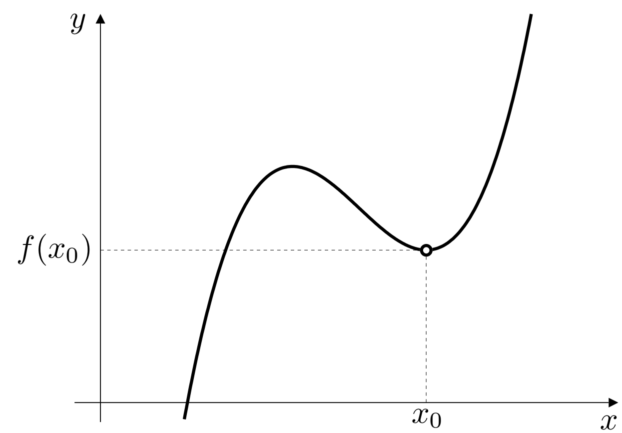
Průběh funkce

Extrémy funkcí: *Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého lokálního minima $f(x_0)$,* pokud existuje okolí bodu x_0 takové, že žádná funkční hodnota na tomto okolí neklesne pod hodnotu $f(x_0)$.

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého ostrého lokálního minima $f(x_0)$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že každá funkční hodnota na tomto okolí je větší než $f(x_0)$.

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$



Extrémy funkcí:

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního maxima* $f(x_0)$:

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého ostrého lokálního maxima* $f(x_0)$:

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) > f(x)$$

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého lokálního minima* $f(x_0)$:

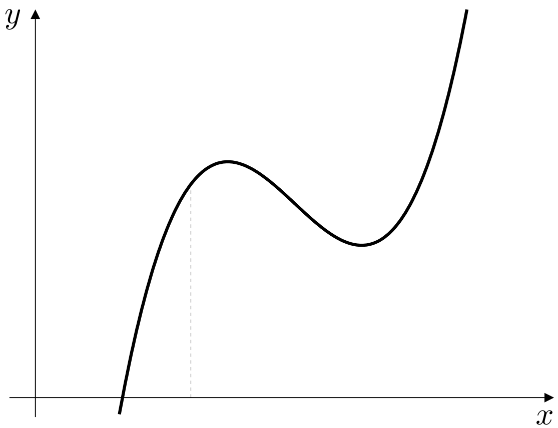
$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Funkce f *nabývá v bodě* $x_0 \in D(f)$ *svého ostrého lokálního minima* $f(x_0)$:

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall x \in D(f)\big)0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$

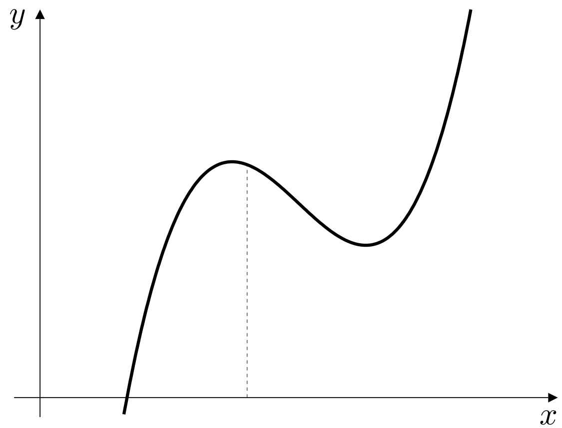
Průběh funkce

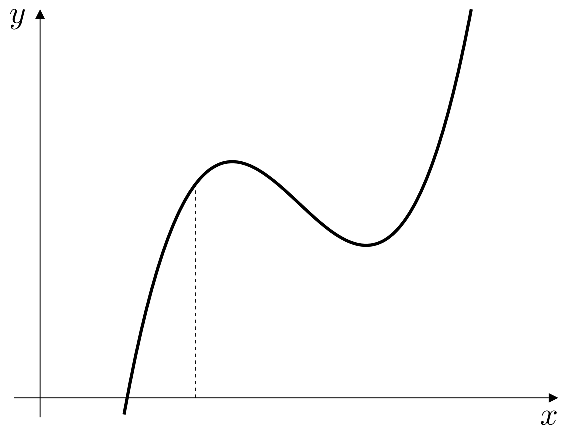
Funkce f v bodě x roste: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.



Průběh funkce

Funkce f v bodě x roste: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f v bodě x klesá: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

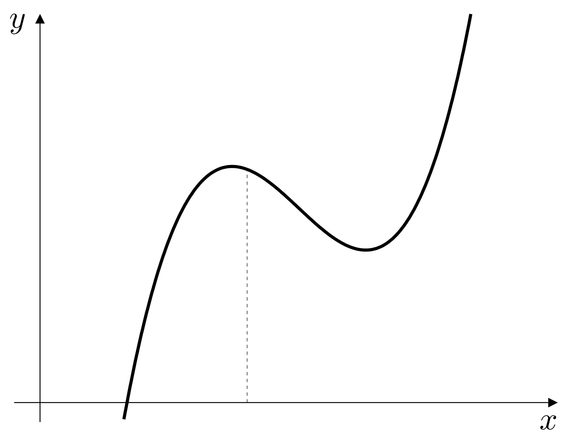


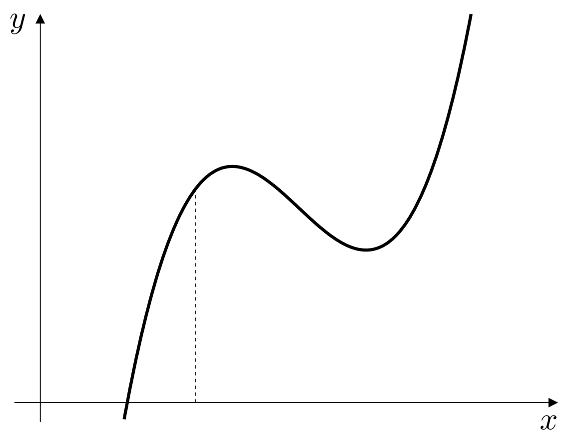


Průběh funkce

Funkce f v bodě x roste: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f rostoucí.
Funkce f v bodě x klesá: existuje okolí bodu x, na kterém je funkce f klesající.

Tedy: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ v bodě x roste
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ v bodě x klesá





Průběh funkce

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

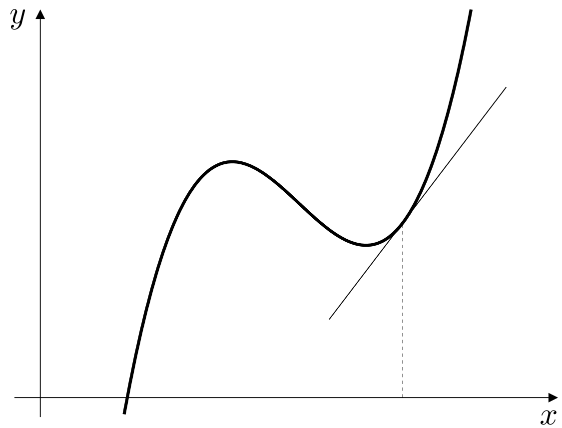
kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Tedy: $\quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je v bodě x *konvexní* („graf leží nad tečnou“)



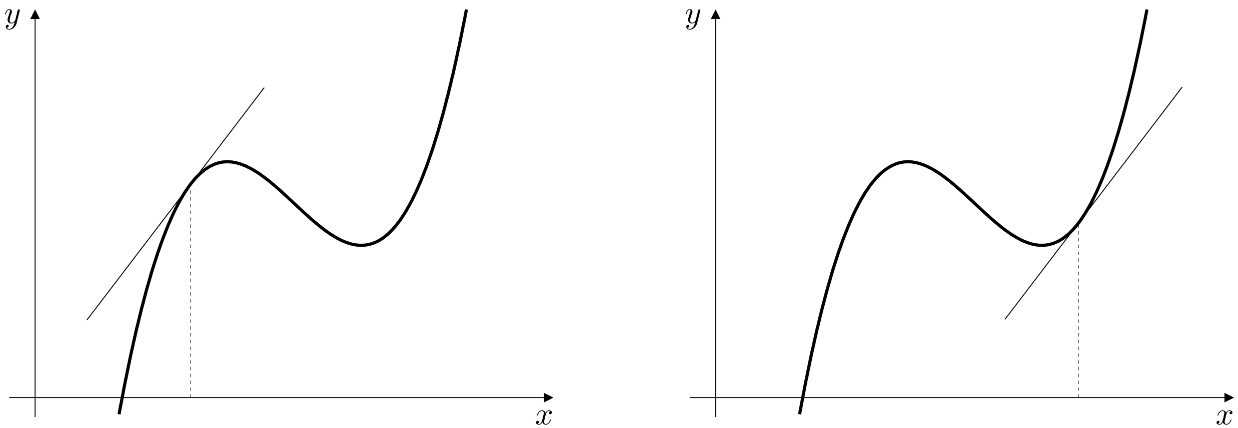
Průběh funkce

Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

Tedy: $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je v bodě x *konvexní* („graf leží nad tečnou“)
$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je v bodě x *konkávní* („graf leží pod tečnou“)



Průběh funkce

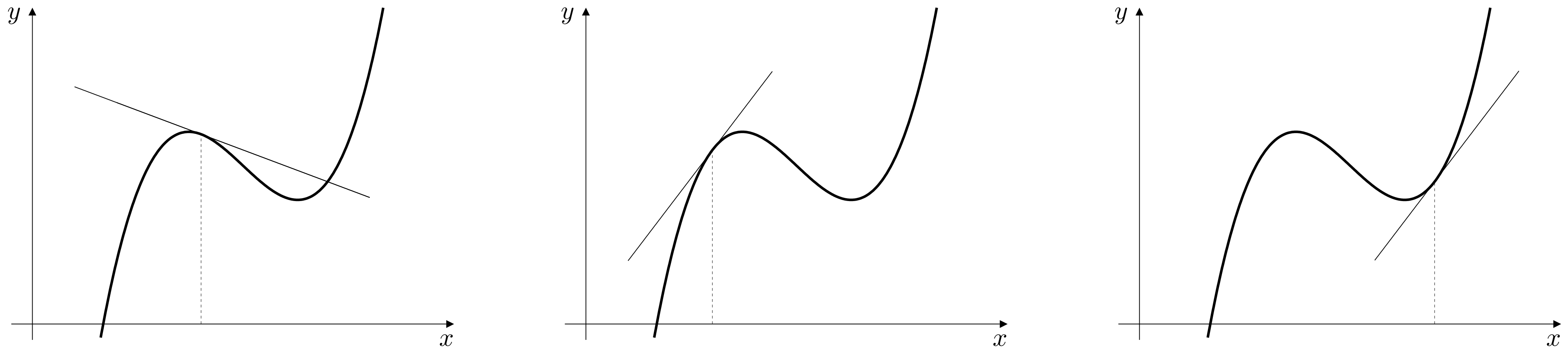
Je-li ε „malé“, pak pro $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R,$$

kde R je „zanedbatelně malé“. Hodnoty $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ leží na tečně ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Pokud $f''(x_0) > 0$, tak hodnoty $f(x)$ leží nad touto tečnou, pokud $f''(x_0) < 0$, tak pod ní.

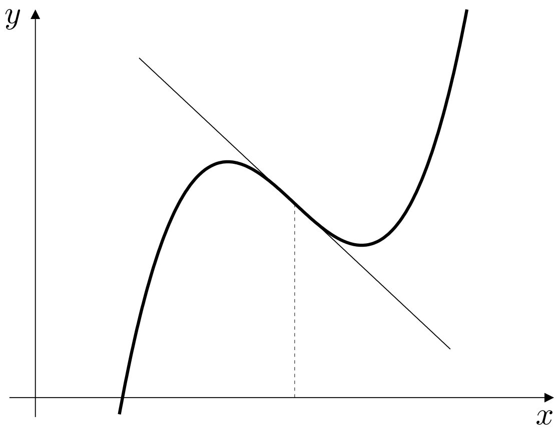
Tedy: $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je v bodě x *konvexní* („graf leží nad tečnou“)

$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je v bodě x *konkávní* („graf leží pod tečnou“)



Průběh funkce

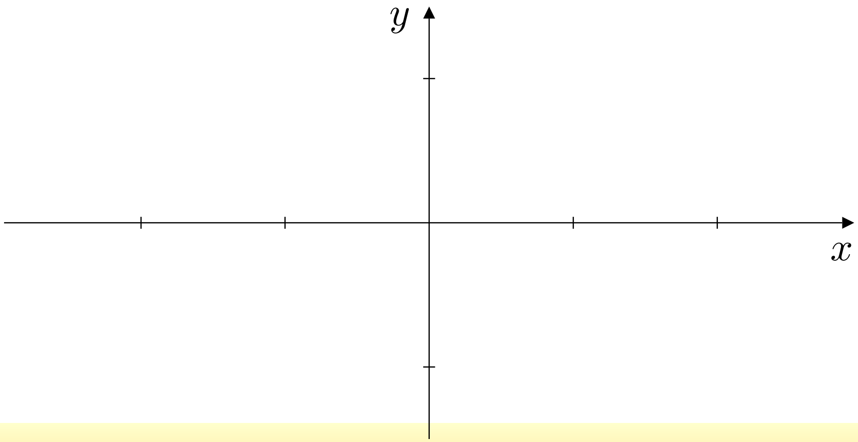
Bod x_0 se nazývá *inflexní bod*, pokud v jeho levém okolí je funkce f konvexní (resp. konkávní) a v pravém okolí je konkávní (resp. konvexní); „graf funkce přechází v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ z jedné strany tečny na druhou".



Vyšetřování průběhu funkce f:

1. Určíme $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, hodnotu $f(0)$ (průsečík grafu s osou y).
2. Najdeme nulové body funkce f a intervaly, na nichž je funkce kladná a záporná.
3. Najdeme nulové body první derivace f' a body, v nichž f' není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce f rostoucí a na kterých je klesající.
4. Najdeme body lokálních extrémů, tj. body, v nichž se funkce mění z rostoucí na klesající (lokální maxima), a body, v nichž se mění z klesající na rostoucí (lokální minima).
5. Najdeme nulové body druhé derivace f'' a body, vnichž f'' není definována. Najdeme intervaly, na kterých je funkce f konvexní a na kterých je konkávní.
6. Najdeme inflexní body s příslušnými funkčními hodnotami a hodnotou derivace (směrnici tečny v inflexním bodě).
7. Určíme limity v nevlastních bodech.
8. Určíme chování funkce v okolí bodů, které „leží na kraji“ $D(f)$.
9. Nakreslíme graf funkce f

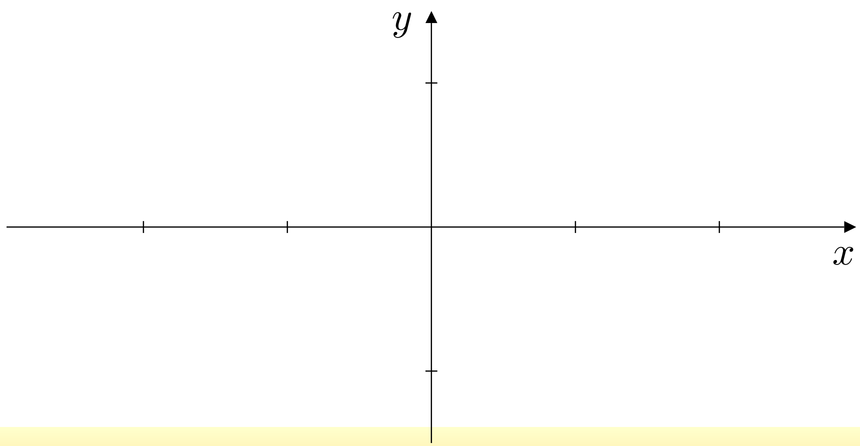
Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.



Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

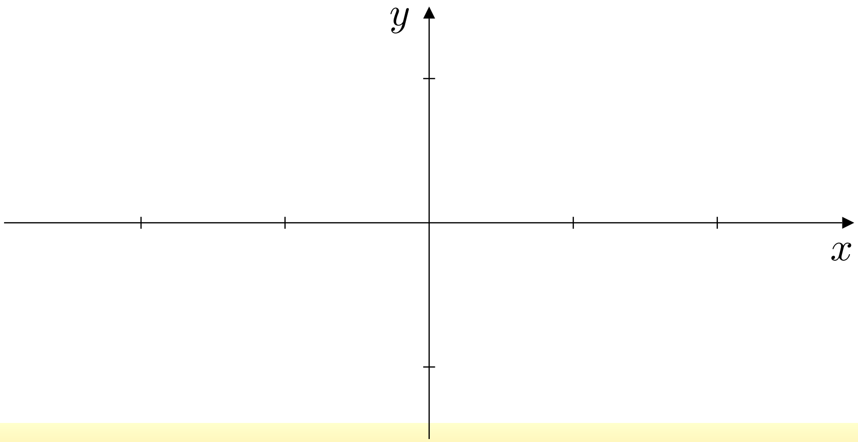
1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,



Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,

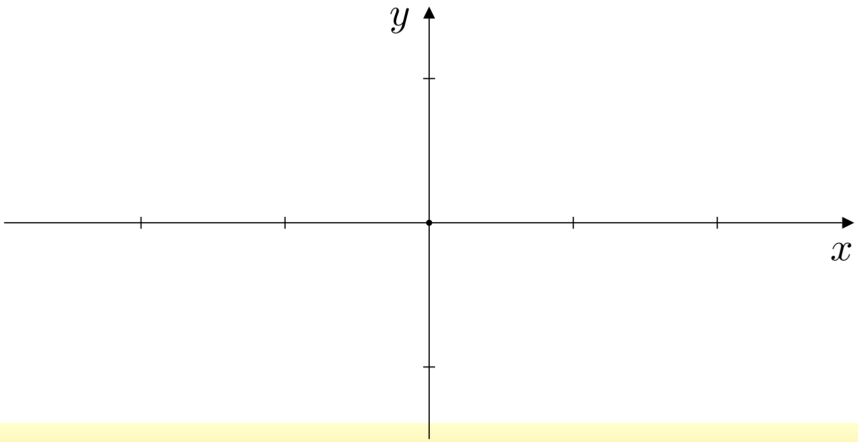


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$

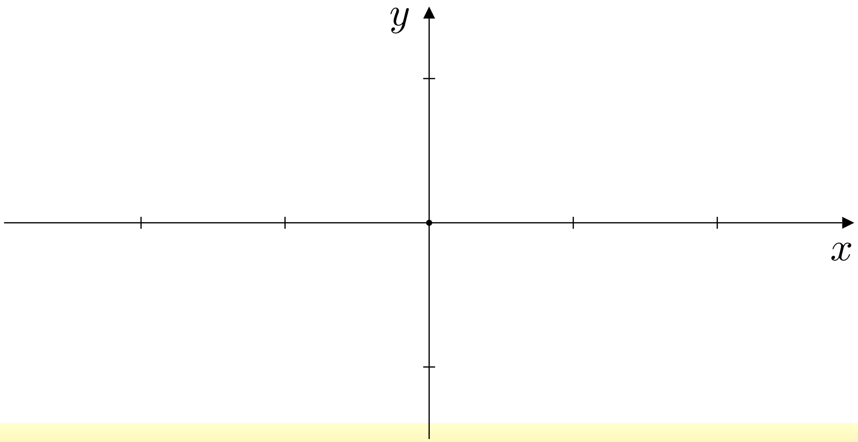
0



Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

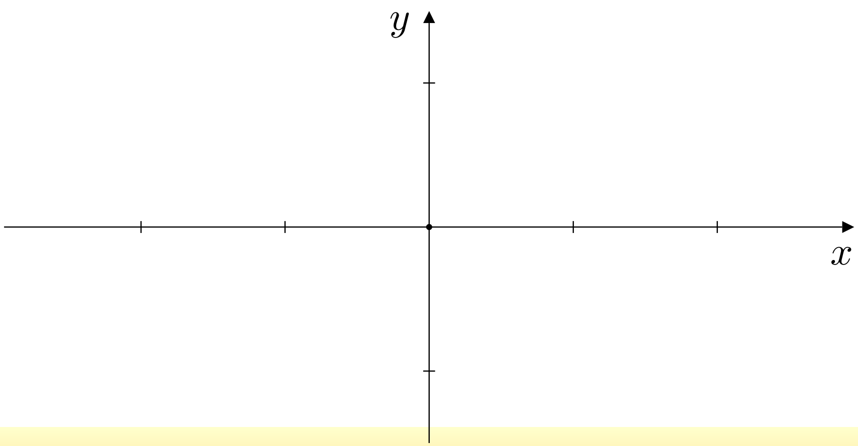
1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$

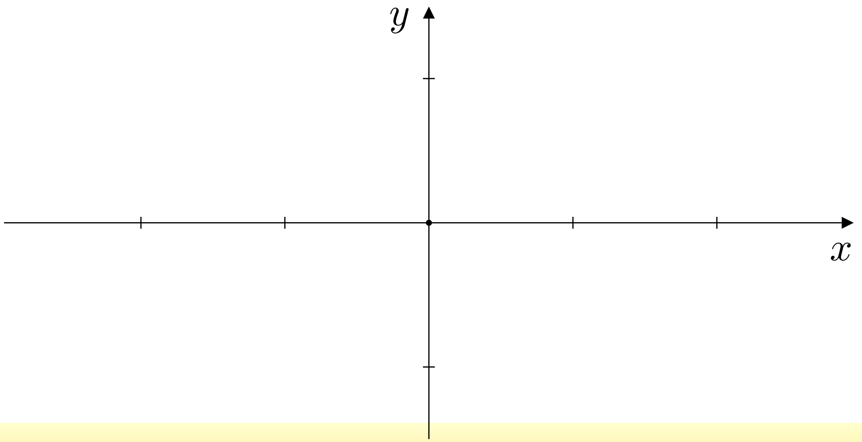
	0	
$f(x)$		$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

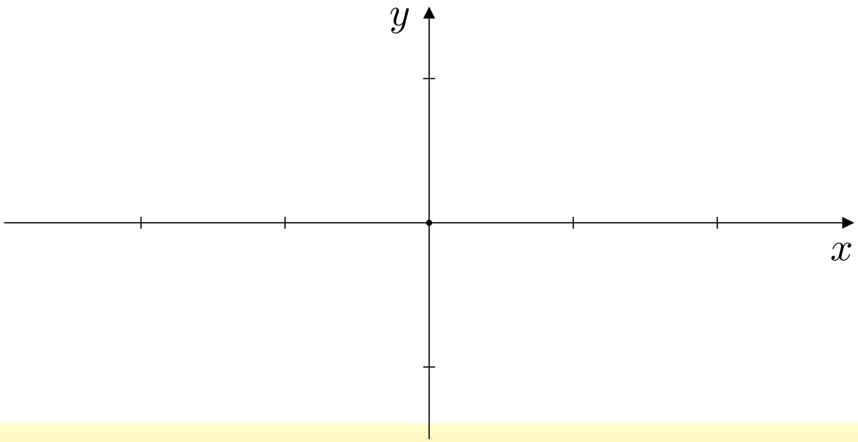
	0
$f(x)$	$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

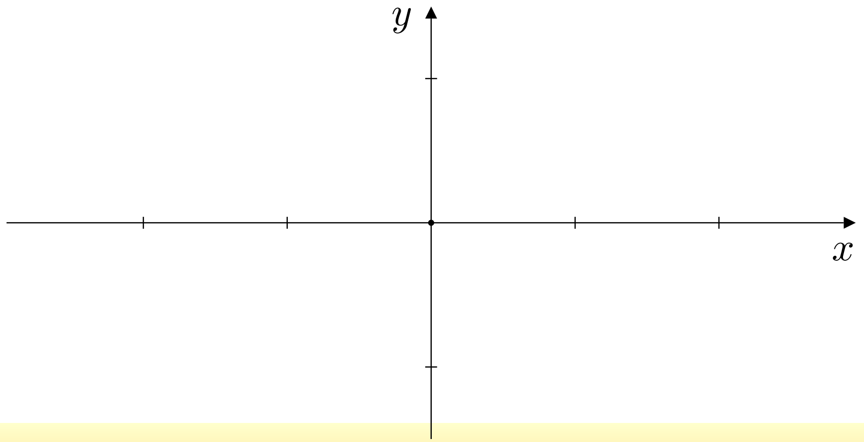
	0	
$f(x)$		$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$

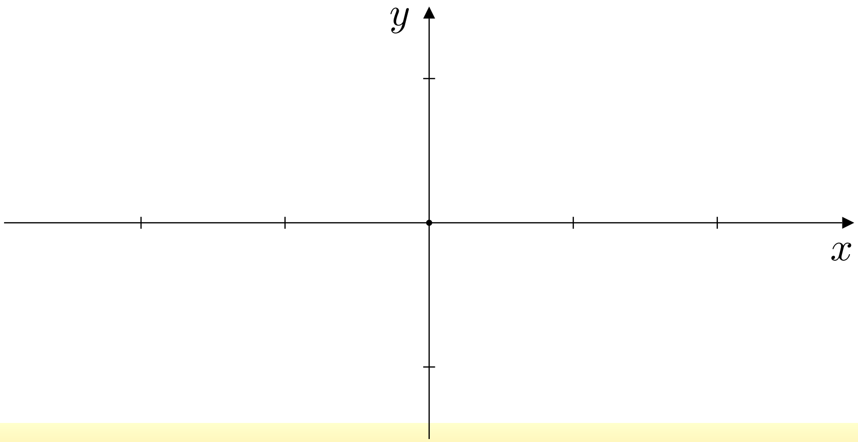


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$

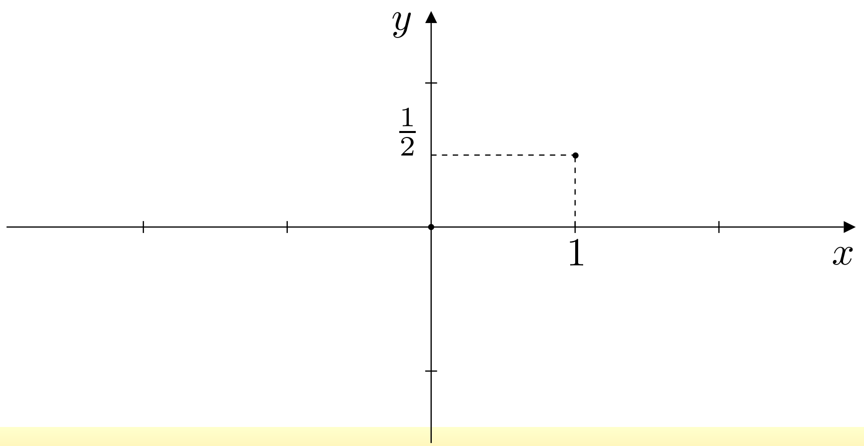
	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$
		$\nearrow$		$\searrow$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$

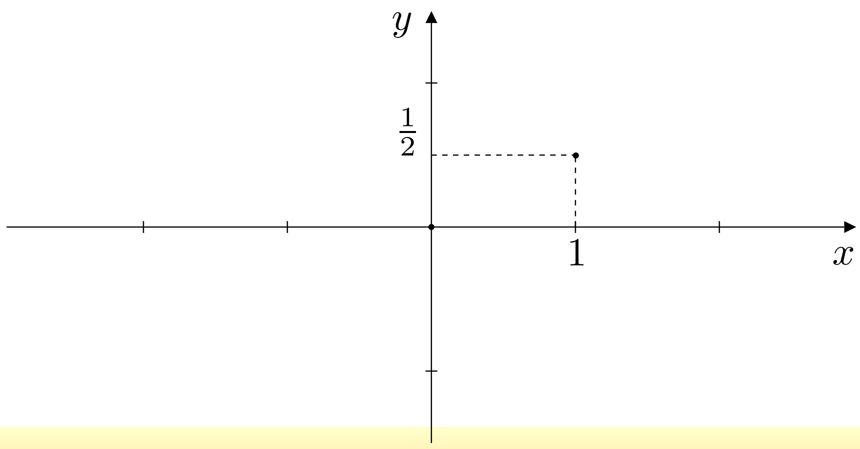
	0		1	
$f(x)$			$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$
		$\nearrow$		$\searrow$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

	0		1	
$f(x)$			+	
$f'(x)$		+		$-$
		$\nearrow$		$\searrow$

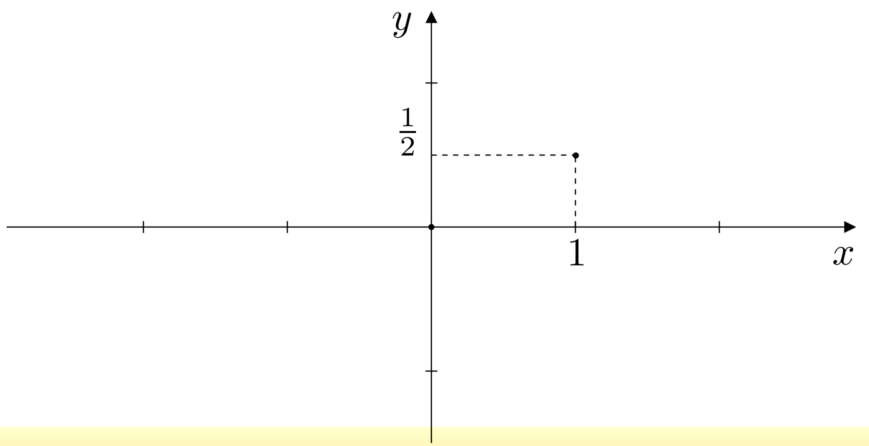


Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $f''(x) = \dfrac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$
   $= \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$

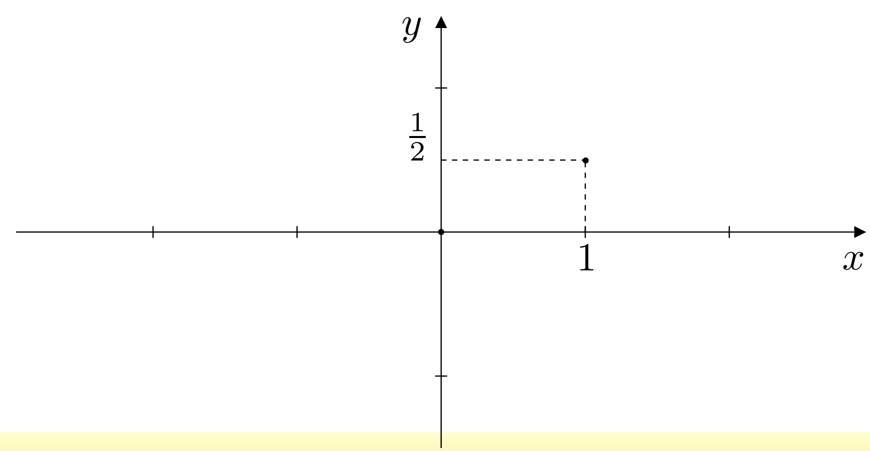
	0		1	
$f(x)$			+	
$f'(x)$		+		−
		$\nearrow$		$\searrow$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$

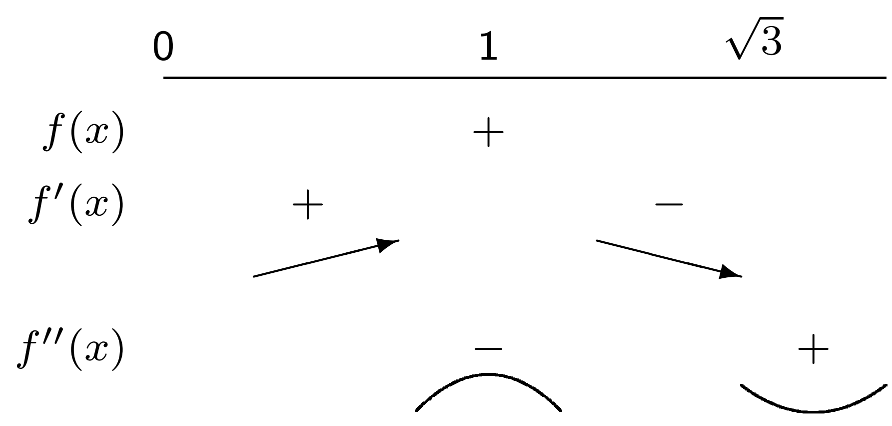
	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			$+$			
$f'(x)$		$+$		$-$		
		$\nearrow$		$\searrow$		
$f''(x)$			$-$			$+$

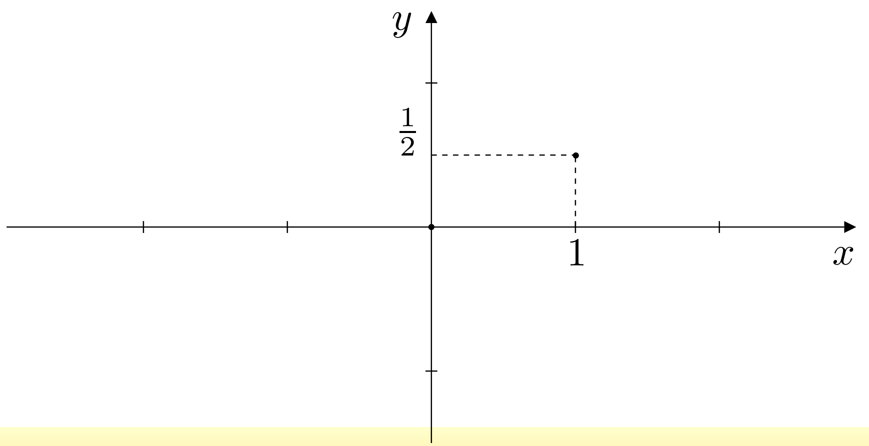


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$

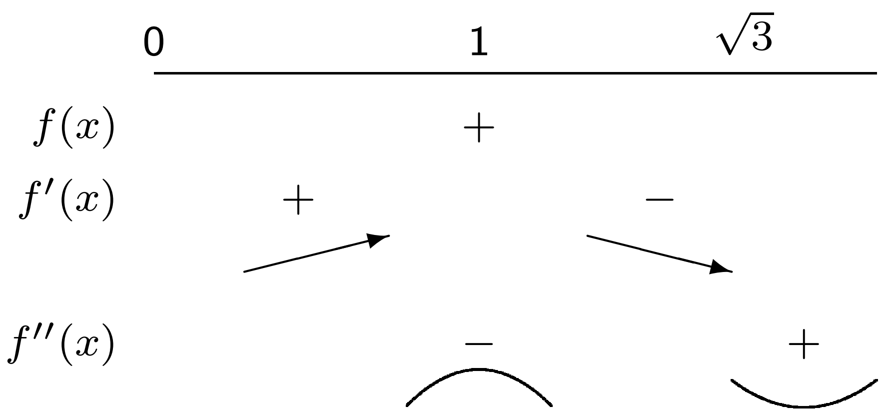


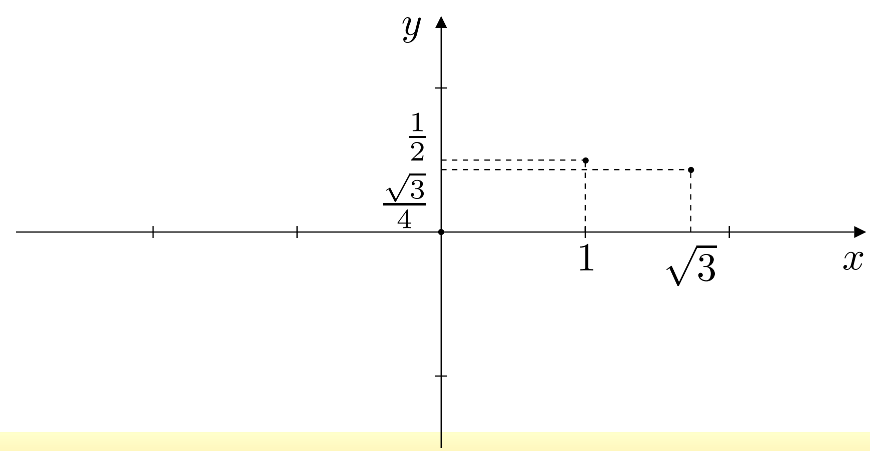


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$



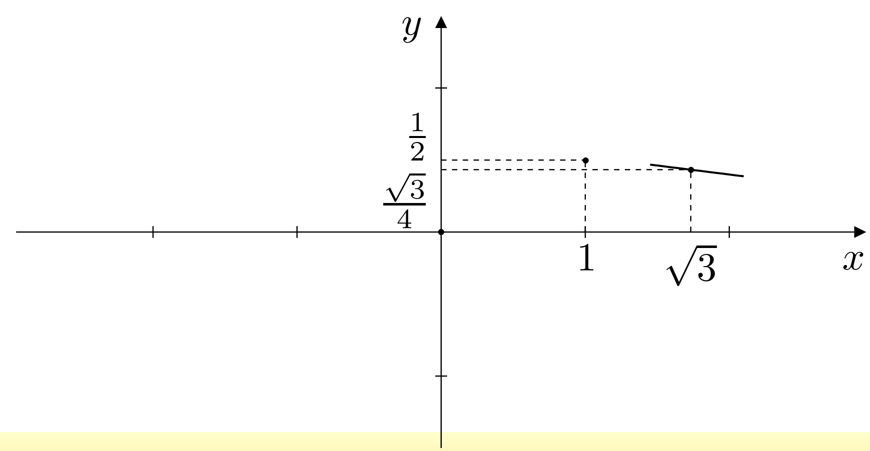


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$

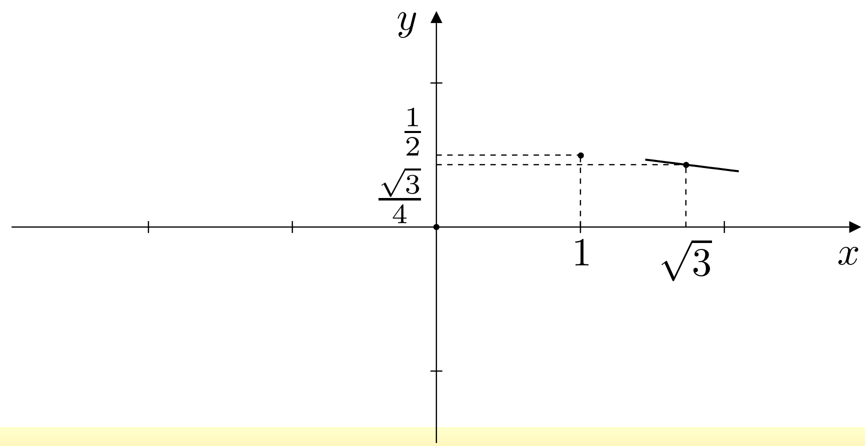
	0		1		$\sqrt{3}$
$f(x)$			$+$		
$f'(x)$		$+$ ↗		$-$ ↘	
$f''(x)$			$-$ ⌒		$+$ ⌣



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$,
   $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

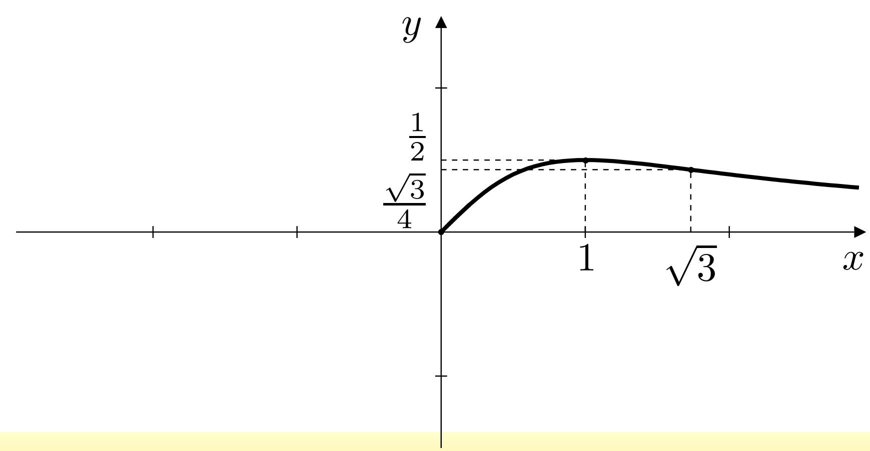
	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			$+$			
$f'(x)$		$+$			$-$	
$f''(x)$			$-$			$+$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
   $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$,
   $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			$+$			
$f'(x)$		$+$		$-$		
		$\nearrow$		$\searrow$		
$f''(x)$			$-$			$+$
			$\frown$			$\smile$

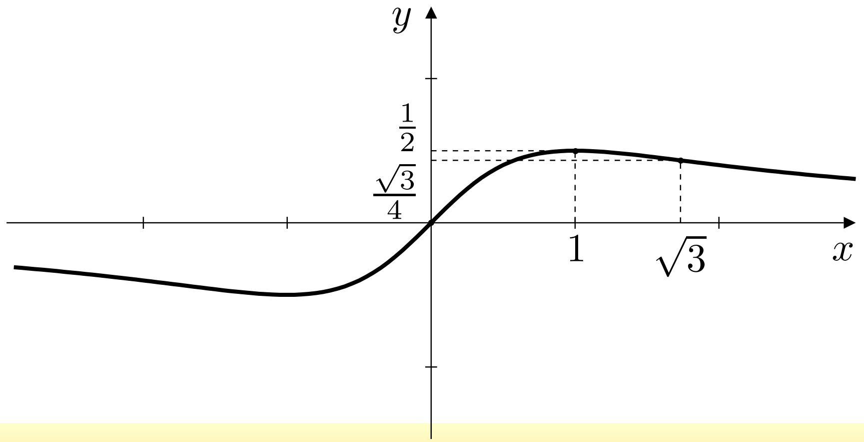


Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, lichá – stačí vyšetřovat na $\langle 0, \infty)$, $f(0) = 0$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$
3. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$, $f'(x) > 0$ pro $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$
4. $f(1) = \frac{1}{2}$
5. $$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x > \sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$
6. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0{,}4330$, $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

	0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$			+			
$f'(x)$		+		−		
		$\nearrow$		$\searrow$		
$f''(x)$			−			+
			$\frown$			$\smile$



Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{1}{6x^2(1-x)}$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ pro $x > 1$
3. $f'(x) = \frac{1}{6}\left(-\dfrac{2x(1-x) - x^2}{x^4(1-x^2)}\right) = \dfrac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$
   $f'(x) > 0$ pro $x < 0$, $x \in (\frac{2}{3}, 1)$ a $x > 1$,
   $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{2}{3})$
4. $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1{,}125$
5. $$f''(x) = \frac{1}{6}\frac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)\big(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x)\big)}{x^6(1-x)^4} =$$
   $$= 2\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$$
   $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a $x \in (0, 1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$
7. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = 0$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$, $f(x) > 0$ nalevo od 1 a $f(x) < 0$ napravo od 1

Průběh funkce

Příklady: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{1}{6x^2(1-x)}$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
2. $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, 1)$, $f(x) < 0$ pro $x > 1$
3. $f'(x) = \frac{1}{6}\left(-\dfrac{2x(1-x) - x^2}{x^4(1-x^2)}\right) = \dfrac{3x-2}{6x^3(1-x)^2}$
   $f'(x) > 0$ pro $x < 0$, $x \in (\frac{2}{3}, 1)$ a $x > 1$,
   $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{2}{3})$
4. $f(\frac{2}{3}) = \frac{27}{24} = 1{,}125$
5. $f''(x) = \frac{1}{6}\dfrac{3x^3(1-x)^2 - (3x-2)\big(3x^2(1-x)^2 - 2x^3(1-x)\big)}{x^6(1-x)^4} =$
   $= 2\dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}{x^4(1-x)^3}$
   $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a $x \in (0, 1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = 0$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6x^2(1-x)} = \infty$, $f(x) > 0$ nalevo od 1 a $f(x) < 0$ napravo od 1