

# Limita a spojitost

M1030 Matematika pro biology

8. a 15. 11. 2022

## Posloupnosti

Pojem posloupnosti

Příklady posloupností

Diference a její význam

Limita

Vlastnosti limity

Příklady

Nevlastní limita

Vlastnosti nevlastní limity

Příklady – nevlastní limity

Spojité funkce

Limita funkce

# Posloupnosti

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:

- ohraničenost
- monotonnost
- periodičita (s přirozenou periodou)

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:

- ohraničenost
- monotonnost
- periodičita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:

- ohraničenost
- monotonnost
- periodičita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:

- obecným předpisem
- rekurentně



# Pojem posloupnosti

*Posloupnost* je funkce s definičním oborem  $\mathbb{N}$ , nebo  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , nebo  $\mathbb{Z}$ .

Označení:  $a$  posloupnost,  $n \in D(a)$ .  $a(n) = a_n$  –  $n$ -tý člen posloupnosti.

Alternativní zápis posloupnosti s definičním oborem  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

Vlastnosti:

- ohraničenost
- monotonnost
- periodičita (s přirozenou periodou)

Operace: aritmetické

Zadávání posloupnosti:

- obecným předpisem
- rekurentně

Rekurentní zápis posloupnosti: předpis pro výpočet  $n$ -tého členu posloupnosti pomocí jednoho (nebo několika předchozích) současně se zadáním počátečního členu (nebo několika počátečních členů)

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
-------	------------------	-------------------	----------

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$

---

$d > 0$  neohraničená rostoucí

$d < 0$  neohraničená klesající,

$d = 0$  ohraničená stacionární

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

---

$q > 1, a_0 \neq 0$	neohraničená, $a_0 > 0$ rostoucí, $a_0 < 0$ klesající
$q = 1$	ohraničená (stacionární)
$0 < q < 1, a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ klesající, $a_0 < 0$ rostoucí
$q = 0, a_0 \neq 0$	ohraničená, $a_0 > 0$ nerostoucí, $a_0 < 0$ neklesající
$-1 < q < 0, a_0 \neq 0$	ohraničená, „tlumené oscilace“
$q = -1, a_0 \neq 0$	ohraničená, periodická s periodou 2
$q < -1, a_0 \neq 0$	neohraničená, „netlumené oscilace“

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
<i>Fibonacciho</i>	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
<i>Fibonacciho</i>	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}}$	

---

pro „velká“  $n$  „se chová“ jako geometrická s kvocientem  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  a počátečním členem  $\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})$



# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
<i>Fibonacciho</i>	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
<i>logistická</i>	$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \frac{r-1}{r} \frac{a_n}{K}\right)$		$r$ – růstový koeficient, $K$ – kapacita (úživnost)

# Příklady posloupností

Název	rekurentní vztah	obecný člen $a_n$	poznámka
<i>aritmetická</i>	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_0 + nd$	$d$ – diference, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$
<i>geometrická</i>	$a_{n+1} = qa_n$	$q^n a_0$	$q$ – kvocient, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$
<i>Fibonacciho</i>	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$ $a_0 = 1, a_1 = 1$	$\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$	
<i>logistická</i>	$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \frac{r-1}{r} \frac{a_n}{K}\right)$		$r$ – růstový koeficient, $K$ – kapacita (úživnost)

---


$$r = 2, K = \frac{1}{2}, a_n = 2(1 - a_n): a_n = \frac{1}{2} \left(1 - (1 - 2a_0)^{2^n}\right)$$

$$r = 4, K = \frac{3}{4}, a_n = 4(1 - a_n): a_n = [\sin(2^n \arcsin \sqrt{a_0})]^2$$

# Diference a její význam

*První diference vpřed:*  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

# Diference a její význam

*První diference vpřed:*  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n) \Delta a_n > 0 \Rightarrow$  posloupnost je rostoucí,

$(\forall n) \Delta a_n < 0 \Rightarrow$  posloupnost je klesající

$(\forall n) \Delta a_n \geq 0 \Rightarrow$  posloupnost je neklesající

$(\forall n) \Delta a_n \leq 0 \Rightarrow$  posloupnost je nerostoucí

# Diference a její význam

*První diference vpřed:*  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n) \Delta a_n > 0 \Rightarrow$  posloupnost je rostoucí,

$(\forall n) \Delta a_n < 0 \Rightarrow$  posloupnost je klesající

$(\forall n) \Delta a_n \geq 0 \Rightarrow$  posloupnost je neklesající

$(\forall n) \Delta a_n \leq 0 \Rightarrow$  posloupnost je nerostoucí

$\Delta a_n$  lze chápat jako  $n$ -tý člen nějaké posloupnosti;  
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

# Diference a její význam

První diference vpřed:  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n) \Delta a_n > 0 \Rightarrow$  posloupnost je rostoucí,

$(\forall n) \Delta a_n < 0 \Rightarrow$  posloupnost je klesající

$(\forall n) \Delta a_n \geq 0 \Rightarrow$  posloupnost je neklesající

$(\forall n) \Delta a_n \leq 0 \Rightarrow$  posloupnost je nerostoucí

$\Delta a_n$  lze chápat jako  $n$ -tý člen nějaké posloupnosti;  
diferenci lze chápat jako posloupnost.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow \{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Rekurentní formuli lze přepsat pomocí diference:

Příklad:

$$a_{n+1} = r a_n \left( 1 - \frac{r-1}{r} \frac{a_n}{K} \right)$$

$$a_{n+1} - a_n = r a_n - (r-1) \frac{a_n^2}{K} - a_n$$

$$\Delta a_n = (r-1) a_n \left( 1 - \frac{a_n}{K} \right)$$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$



# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

Ať zvolíme „měřítko malosti“  $\varepsilon$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti „blízko“ čísla  $\alpha$ .

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

Ať zvolíme „měřítko malosti“  $\varepsilon$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti „blízko“ čísla  $\alpha$ .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

Ať zvolíme „měřítko malosti“  $\varepsilon$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti „blízko“ číslu  $\alpha$  a při dalším zvětšení indexu  $n$  se již od  $\alpha$  nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

Ať zvolíme „měřítko malosti“  $\varepsilon$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti „blízko“ čísla  $\alpha$  a při dalším zvětšení indexu  $n$  se již od  $\alpha$  nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |a_n - \alpha| < \varepsilon$$



# Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Členy posloupnosti se přibližují k číslu  $\alpha$

Vzdálenost mezi čísly  $a_n$  a  $\alpha$ :  $|a_n - \alpha|$

„ $a_n$  je blízko k  $\alpha$ “:  $|a_n - \alpha|$  je menší než „měřítko malosti“,  $\varepsilon$ ;  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Proces: zvětšování indexu  $n$

Když zvětšujeme index  $n$  tak dojde k tomu, že členy posloupnosti jsou blízko k číslu  $\alpha$

Ať zvolíme „měřítko malosti“  $\varepsilon$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti „blízko“ čísla  $\alpha$  a při dalším zvětšení indexu  $n$  se již od  $\alpha$  nevzdálí.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

# Vlastnosti limity

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená
- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$
- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$



# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

# Vlastnosti limity

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Pokud existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá *konvergentní*.

- Konvergentní posloupnost je ohraničená

- $(\forall n) a_n = c$  (posloupnost je *stacionární*)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

- $(\forall n) a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $(\forall n) a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ , pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$$



# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1 \end{aligned}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1} - 3^{n+1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^n} - \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3} \right) = 0 - \frac{1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$0 < \frac{n^2}{2^n} = \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + 1}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n^2}{2^n} &= \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} = \\ &= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n} \end{aligned}$$

# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n^2}{2^n} &= \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} = \\ &= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n} + n} = 0$$



# Příklady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro } |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n^2}{2^n} &= \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+1} < \frac{n^2}{1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}} = \\ &= \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}} = \frac{6n^2}{6+6n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)} = \\ &= \frac{6n^2}{6+5n+n^3} = \frac{6}{\frac{6}{n^2}+\frac{5}{n}+n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n} + n} = 0$$

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index  $n$  tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index  $n$  tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“  $H$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti větší než hranice  $H$  a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Členy posloupnosti neomezeně rostou.

Když zvětšujeme index  $n$  tak členy posloupnosti rostou nade všechny meze

Ať zvolíme „hranici velikosti“  $H$  jakkoliv, tak po dostatečném zvětšení indexu  $n$  budou členy posloupnosti větší než hranice  $H$  a při dalším zvětšování indexu již pod tuto hranici neklesnou.

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  *diverguje do nekonečna*.

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  *diverguje do nekonečna*.

# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  *diverguje do nekonečna*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$



# Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  *diverguje do nekonečna.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n < H$$

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  *diverguje do minus nekonečna.*

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \mp\infty$

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \mp\infty$

$$a_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

$$a_n = n^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$a_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$



# Vlastnosti nevlastní limity

Nevlastní limita není limita

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.
- Divergentní posloupnost je neohraničená.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \mp\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je ohraničená  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $a_n < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

# Vlastnosti nevlastní limity

Operace na  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  (rozšířené množině reálných čísel)

# Vlastnosti nevlastní limity

Operace na  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty, c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty, c(-\infty) = -\infty$   
 $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty, c(-\infty) = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$
- $\left| \frac{1}{0} \right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

# Vlastnosti nevlastní limity

Operace na  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty, c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty, c(-\infty) = -\infty$   
 $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty, c(-\infty) = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$
- $\left| \frac{1}{0} \right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčité výrazy:  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$

# Vlastnosti nevlastní limity

Operace na  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  (rozšířené množině reálných čísel)

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

- $c + \infty = \infty, c - \infty = -\infty$
- $c > 0 \Rightarrow c\infty = \infty, c(-\infty) = -\infty$   
 $c < 0 \Rightarrow c\infty = -\infty, c(-\infty) = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$
- $\left| \frac{1}{0} \right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčitě výrazy:  $\frac{0}{0} \left( \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0-0}{0^2} = \frac{0}{0} \right)$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

# Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3)$$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 3n + 2n^2 - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} - 1 \right) n^3 = -\infty$$



# Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2}$$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^2}{(1 + n)(1 - n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1 - n} - 1 \right) = -1$$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^2}{(1 + n)(1 - n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1 - n} - 1 \right) = -1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{1 + 0 + 0}{0 - 1} = -1 \end{aligned}$$

# Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1}$$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^5 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^5}}{3 + \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^5}} = \frac{0 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 0$$

# Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1}$$

# Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5}{3n^3 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3 + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \infty$$

## Příklady – nevlastní limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ = 1 & \text{pro } q = 1 \\ = \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right) \infty, & k > m \\ \frac{a_k}{b_m}, & k = m \\ 0, & k < m \end{cases}$$



Posloupnosti

---

**Spojité funkce**

Spojitosť

Spojitosť v bodě

Exkurs: výroky s kvantifikátory

Operace se spojitými funkcemi

Spojitosť na intervalu

Funkce spojitě na uzavřeném intervalu

Limita funkce

---

# Spojité funkce

# Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

# Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou,

# Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

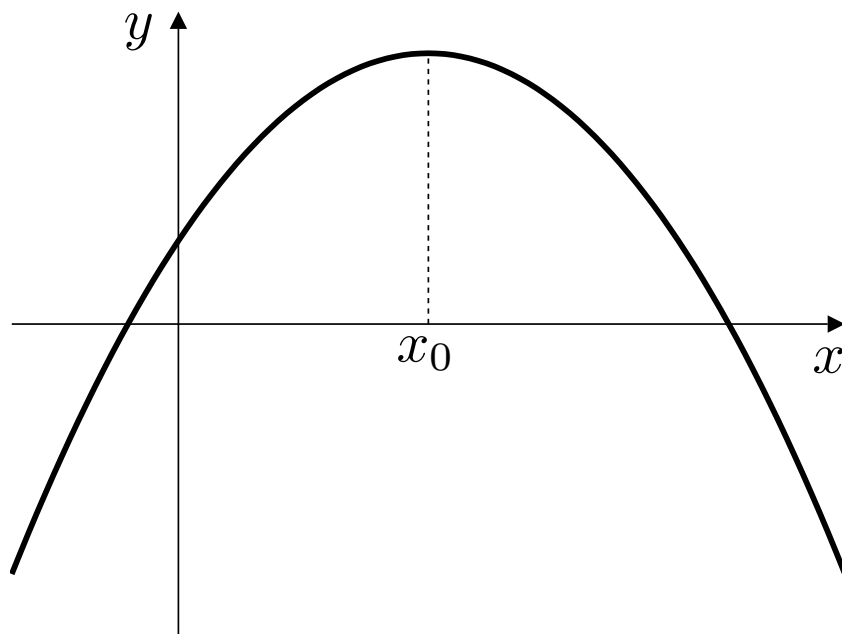
- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;

# Spojitost

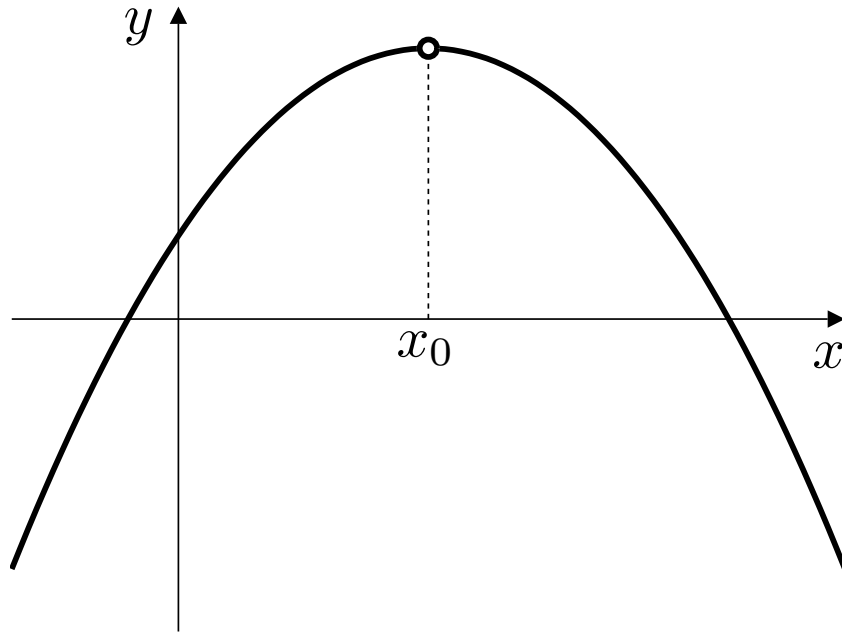
Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušení kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;
- malá změna nezávisle proměnné vyvolá malou změnu závisle proměnné.

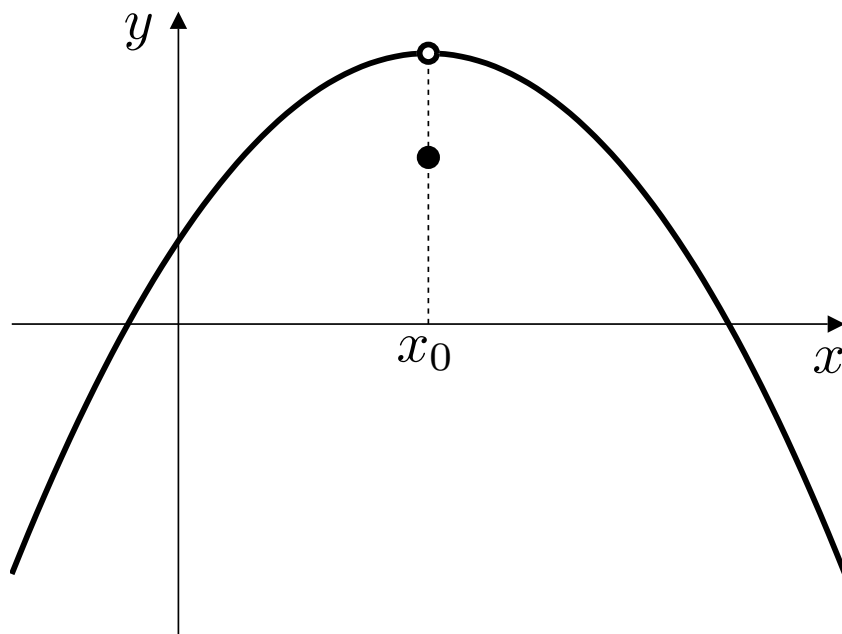
# Spojitosť v bodě



# Spojitosť v bodě

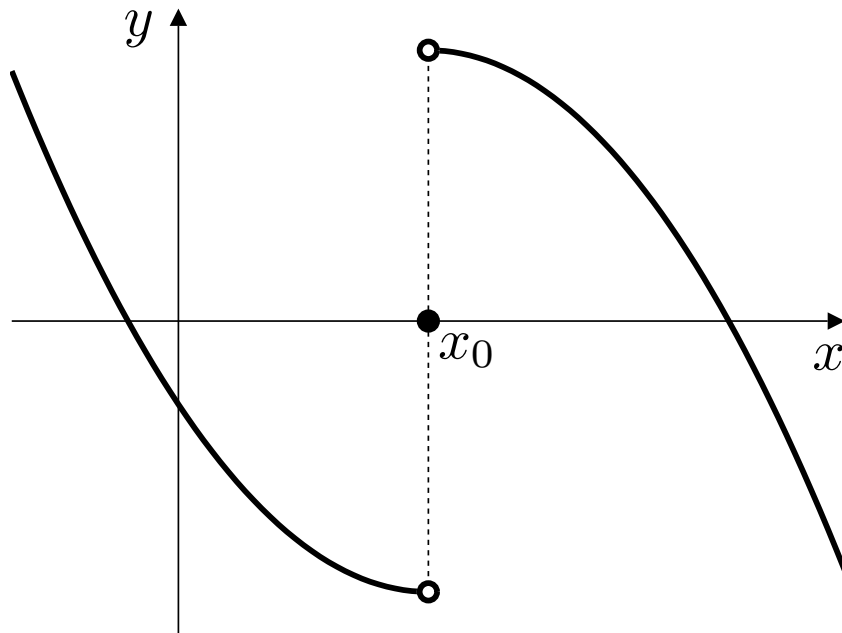


# Spojitosť v bodě

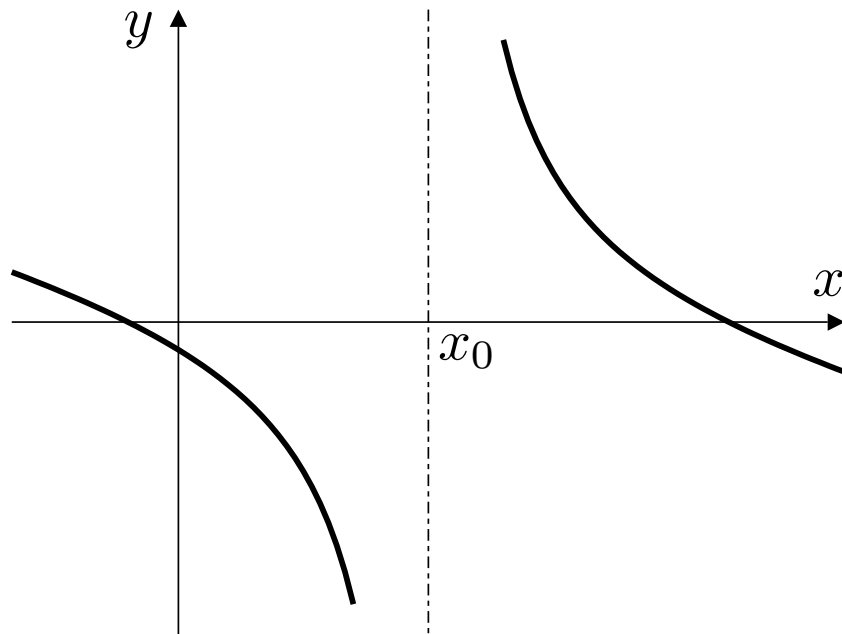




# Spojitosť v bodě

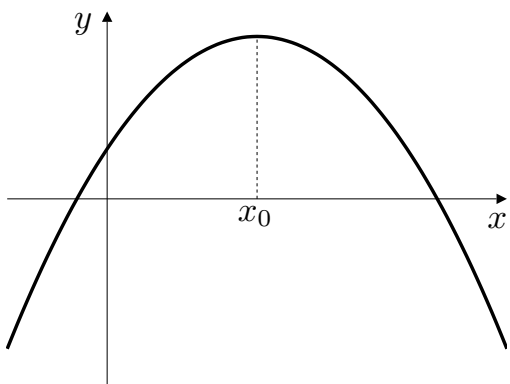


# Spojitosť v bodě

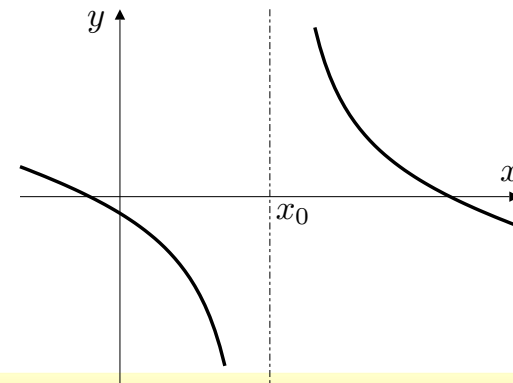
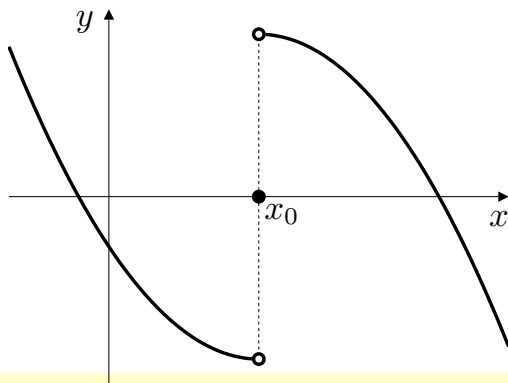
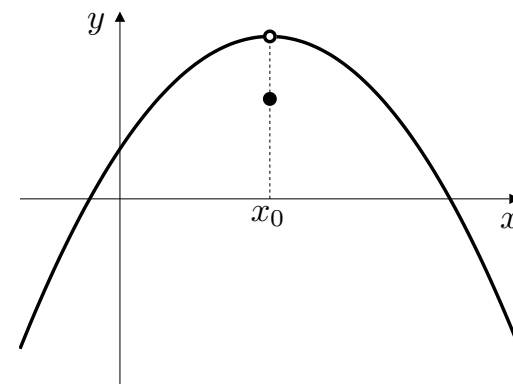
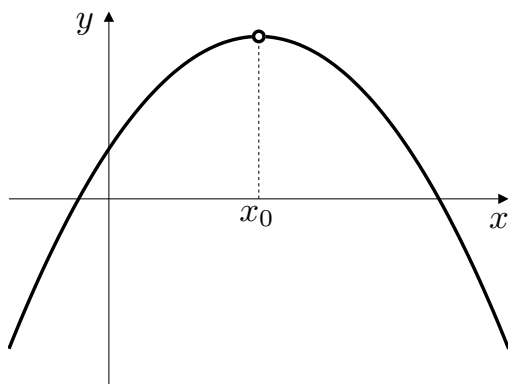


# Spojitosť v bodě

Funkce spojitá v bodě  $x_0$

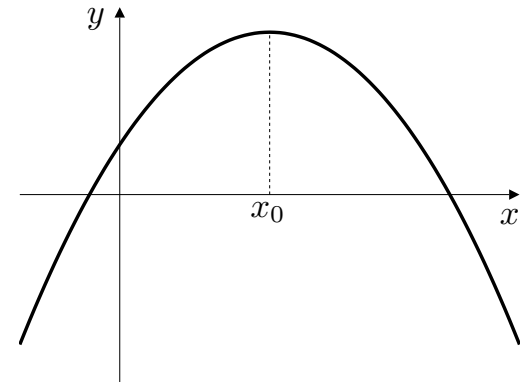


Funkce nespojitá v bodě  $x_0$



# Spojitost v bodě

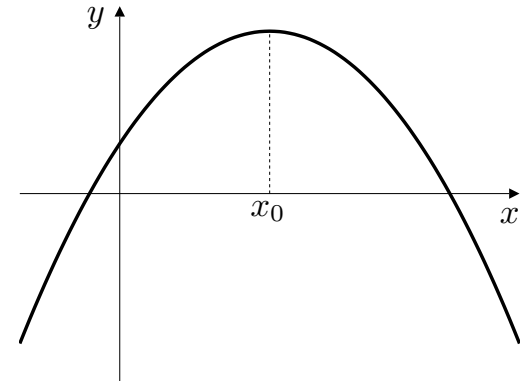
*Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :*



# Spojitost v bodě

*Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :*

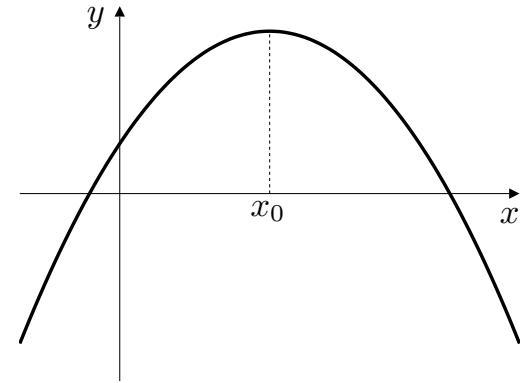
- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .



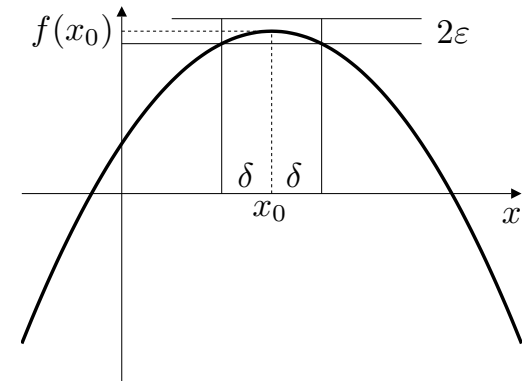
# Spojitosť v bodě

*Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :*

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .



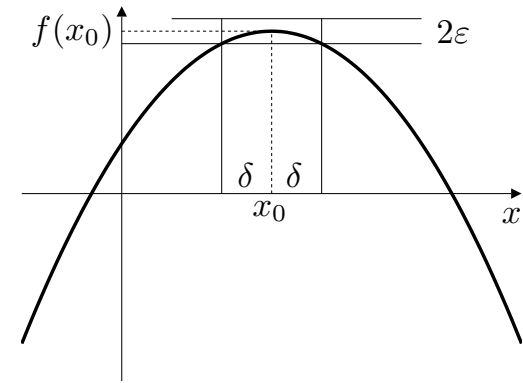
# Spojitosť v bodě



*Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :*

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .

# Spojitosť v bodě



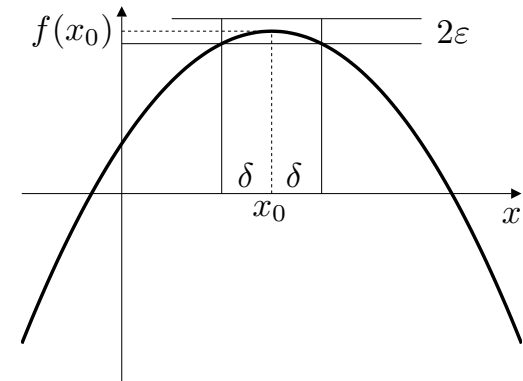
Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .

$$x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



# Spojitosť v bodě

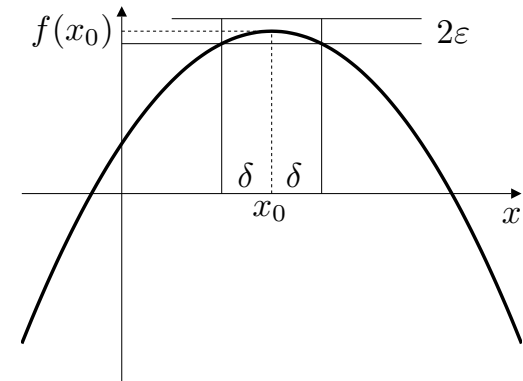


Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .
- Ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě

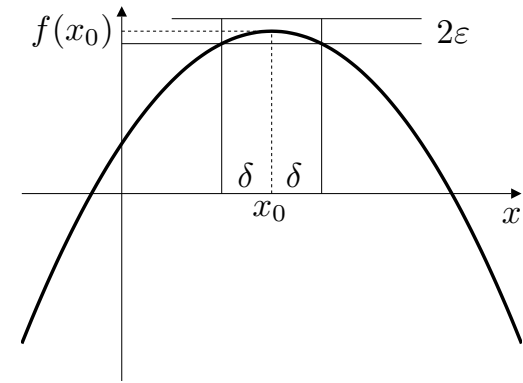


Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .
- Ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Spojítost v bodě

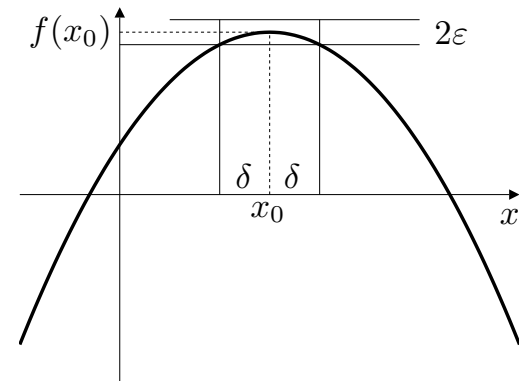


Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .
- Ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$ , že pro jakékoliv  $x \in D(f)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě



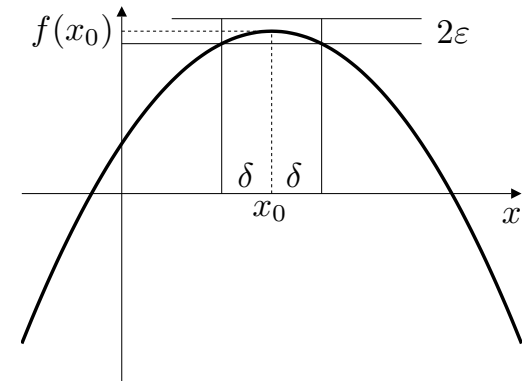
Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :

- Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  definována,  $x_0 \in D(f)$ .
- Je-li  $x$  „blízko“  $x_0$  pak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$ .
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“  $\varepsilon$  závisle proměnné  $\varepsilon$ , lze k němu najít „měřítko blízkosti“  $\delta$  nezávisle proměnné takové, že když je  $x$  „blízko“ k  $x_0$  „podle měřítka“  $\delta$ , tak je  $f(x)$  „blízko“  $f(x_0)$  „podle měřítka“  $\varepsilon$ .
- Ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$ , že pro jakékoliv  $x \in D(f)$  z  $\delta$ -blízkosti  $x$  k  $x_0$  nutně vyplýne  $\varepsilon$ -blízkost  $f(x)$  k  $f(x_0)$ .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Spojitost v bodě

*Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ :*



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

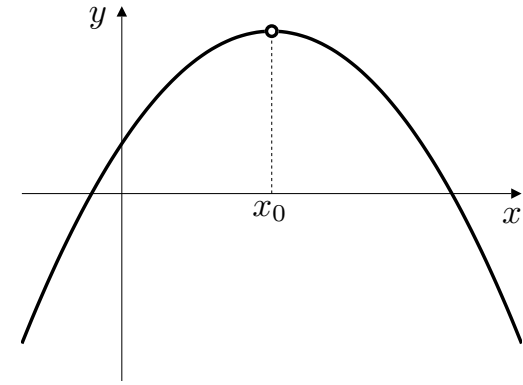
# Spojitosť v bodě

*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

# Spojitosť v bodě

*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

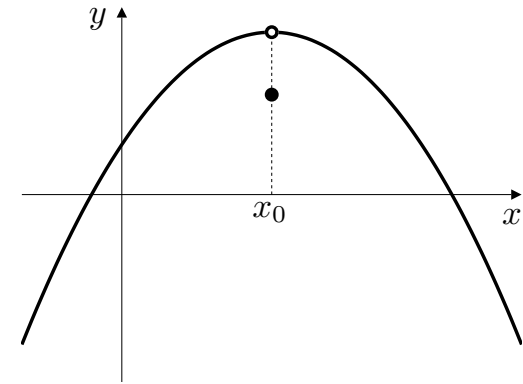
\* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .



# Spojitosť v bodě

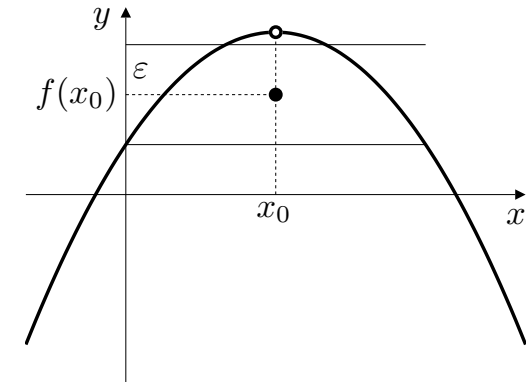
*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.





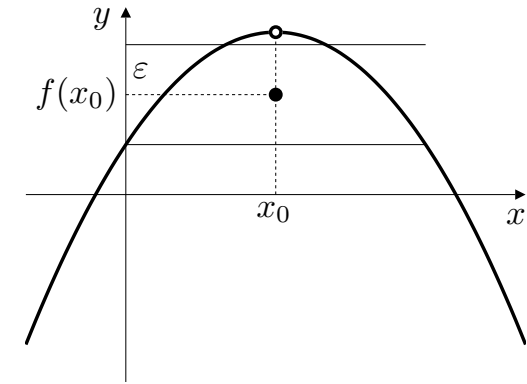
# Spojitosť v bodě



*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .

# Spojitosť v bodě

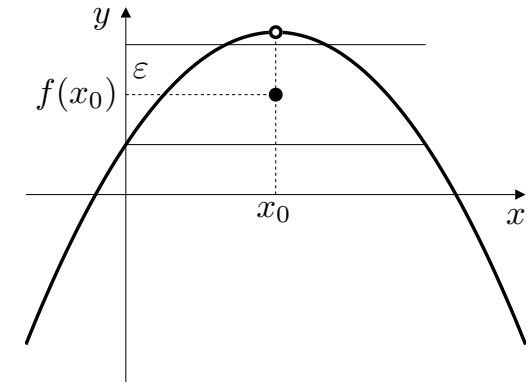


*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .

$$|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě



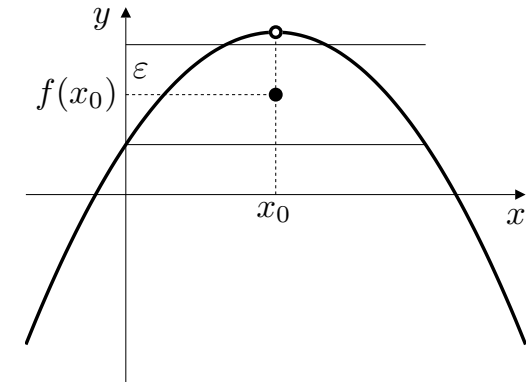
*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“  $\varepsilon$

$$(\exists \varepsilon > 0)$$

$$|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě

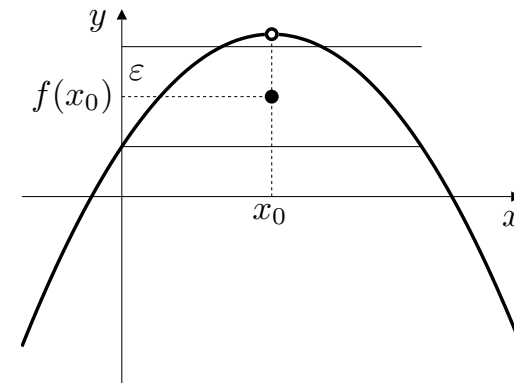


*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“  $\varepsilon$ , že pro libovolné „měřítko blízkosti“  $\delta$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě

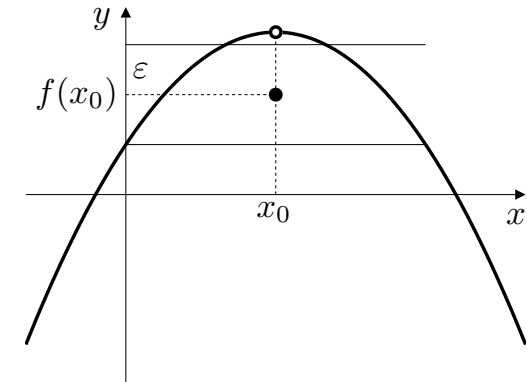


*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“  $\varepsilon$ , že pro libovolné „měřítko blízkosti“  $\delta$  lze najít hodnoty  $x$  nezávisle proměnné

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě



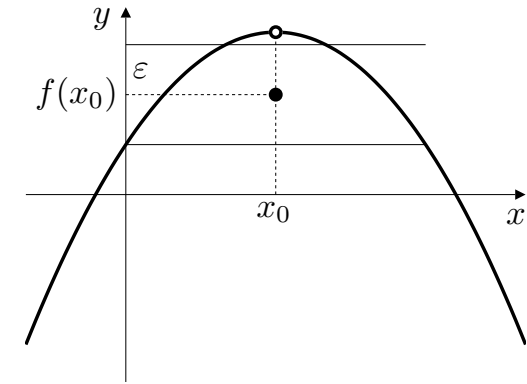
*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0$ :*

- \* Funkce není v  $x_0$  definována;  $x_0 \notin D(f)$ .
- \* Pokud  $x_0 \in D(f)$ , pak
  - Přestože  $x$  „je blízko“ k  $x_0$ , tak  $f(x)$  je od  $f(x_0)$  „daleko“.
  - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k  $x_0$  „daleko“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .
  - Existuje takové „měřítko dalekosti“  $\varepsilon$ , že pro libovolné „měřítko blízkosti“  $\delta$  lze najít hodnoty  $x$  nezávisle proměnné „ $\delta$ -blízké k  $x_0$ “, jejichž příslušné funkční hodnoty jsou „ $\varepsilon$ -vzdálené“ od funkční hodnoty  $f(x_0)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Spojitosť v bodě

*Funkce  $f$  je nespojitá v bodě  $x_0 \in D(f)$ :*



$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

# Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ .



## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

Není pravda, že funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .  
Není pravda, že funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .  
Není pravda, že funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je ohraničená.

## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .  
Není pravda, že funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

## Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce  $f$  je nespojitá v  $x_0 \in D(f)$ . (Funkce  $f$  není spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .  
Není pravda, že funkce  $f$  je spojitá v  $x_0 \in D(f)$ .)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce  $f$  je konstantní.

# Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ . Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojité v bodě  $x_0$ . Pokud navíc  $g(x_0) \neq 0$ , pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě  $x_0$ .

# Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ . Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojité v bodě  $x_0$ . Pokud navíc  $g(x_0) \neq 0$ , pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě  $x_0$ .

Nechť funkce  $g$  je spojitá v bodě  $x_0$  a  $g(x_0) \in D(f)$ . Je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $g(x_0)$ , pak je složená funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $x_0$ .



# Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ . Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojité v bodě  $x_0$ . Pokud navíc  $g(x_0) \neq 0$ , pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě  $x_0$ .

Nechť funkce  $g$  je spojitá v bodě  $x_0$  a  $g(x_0) \in D(f)$ . Je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $g(x_0)$ , pak je složená funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $x_0$ .

Nechť funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$ . Pokud existuje inverzní funkce  $f^{-1}$ , pak je tato funkce spojitá v bodě  $f(x_0)$ .

# Spojitost na intervalu

Funkce  $f$  je *spojitá na intervalu*  $J \subseteq D(f)$ , pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Spojitost na intervalu

Funkce  $f$  je *spojitá na intervalu*  $J \subseteq D(f)$ , pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Každá elementární funkce je spojitá na každém intervalu, který je částí jejího definičního oboru.

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Funkce  $f$  je ohraničená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Funkce  $f$  je ohraničená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

- Funkce  $f$  nabývá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Funkce  $f$  je ohraničená na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

- Funkce  $f$  nabývá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815–1897

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu  $\langle a, b \rangle$  opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice  $f(x) = 0$ .

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$



# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu  $\langle a, b \rangle$  opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice  $f(x) = 0$ .

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$

- Funkce  $f$  nabývá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d) \\ \& (\forall y \in \langle f(c), f(d) \rangle)(\exists \xi \in \langle a, b \rangle) f(\xi) = y$$

# Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$ . Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu  $\langle a, b \rangle$  opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice  $f(x) = 0$ .

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$

- Funkce  $f$  nabývá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

$$\& (\forall y \in \langle f(c), f(d) \rangle)(\exists \xi \in \langle a, b \rangle) f(\xi) = y$$



Bernard Bolzano 1781–1848

Posloupnosti

---

Spojité funkce

---

**Limita funkce**

Představa a pojem limity

Nevlastní limita

Limita v nevlastním bodě

Výpočet limit

Příklady

# Limita funkce

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu  $a$ :

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má ve vlastním bodě  $x_0$  vlastní limitu  $a$ :

# Představa a pojem limity

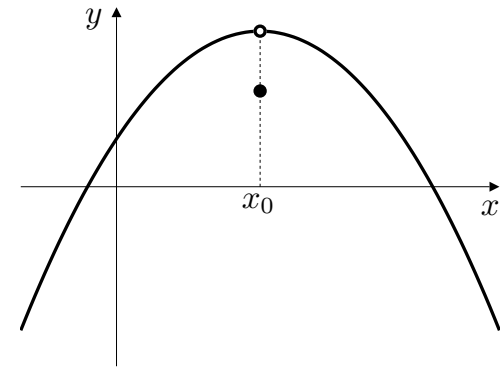
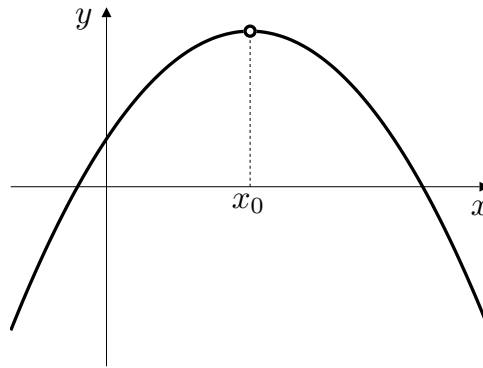
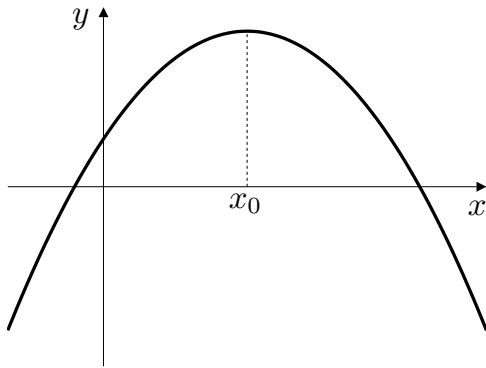
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

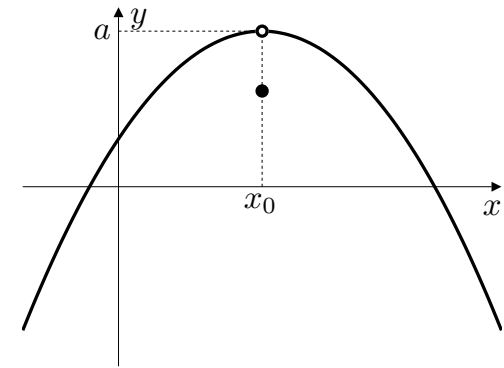
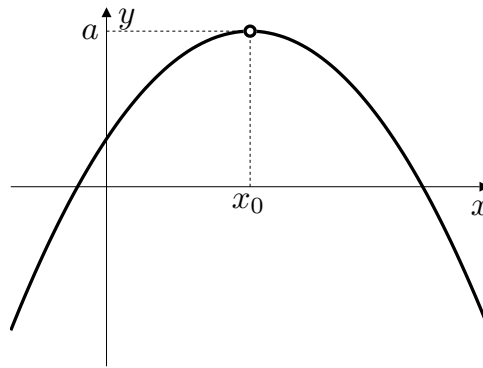
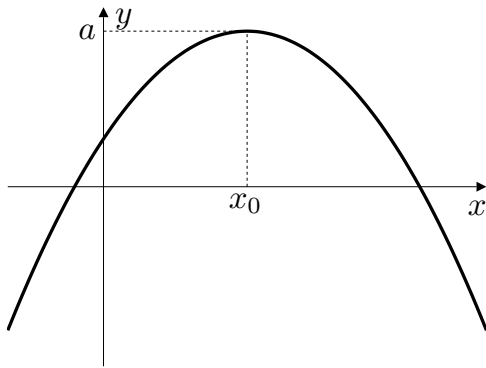
Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



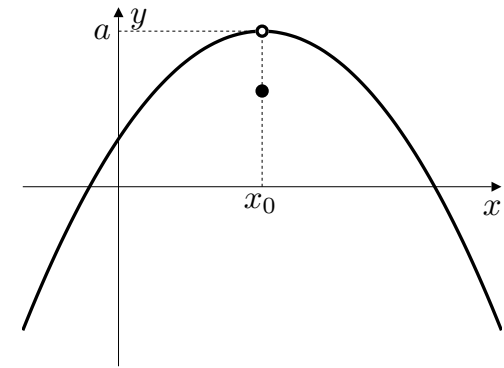
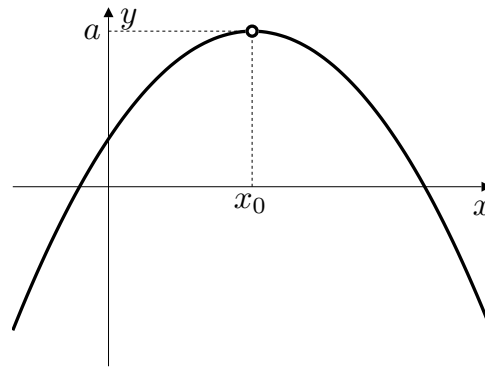
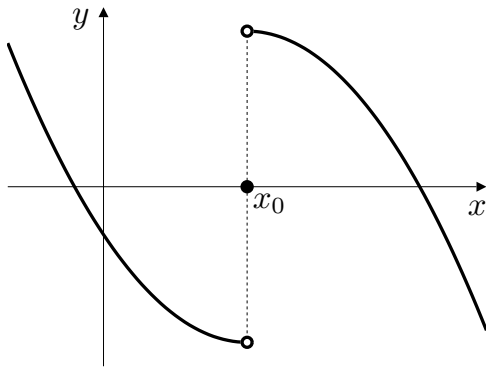
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k  $x_0$  tak se funkční hodnoty přibližují k  $a$ .



# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

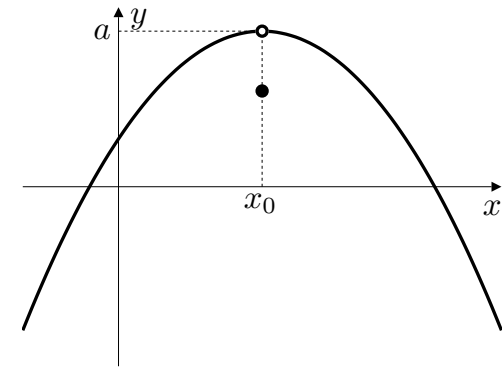
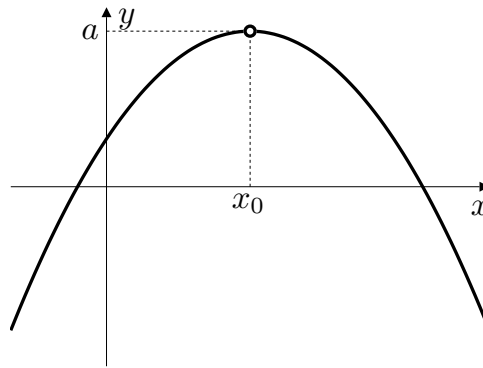
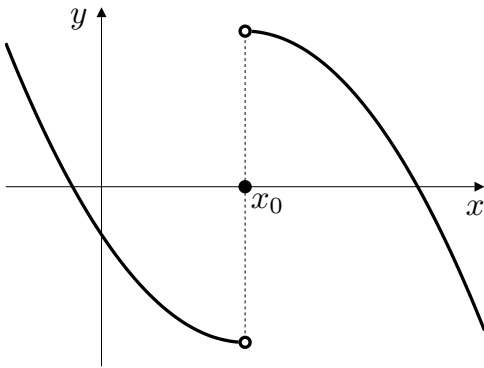


Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k  $x_0$  tak se funkční hodnoty přibližují k  $a$ .

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



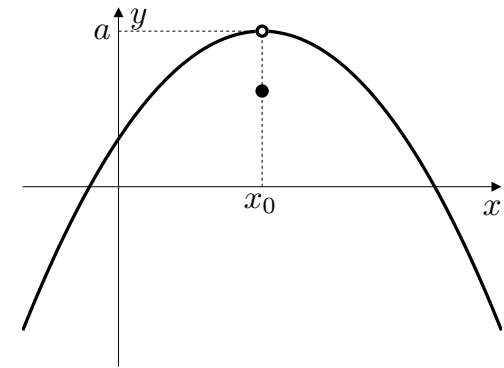
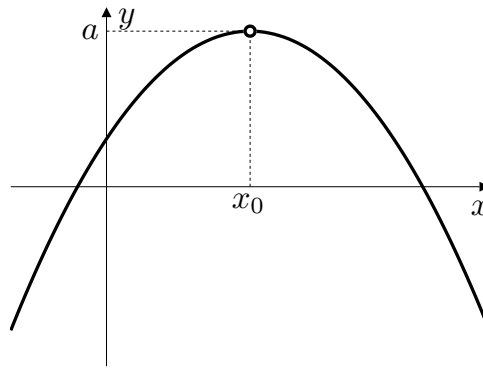
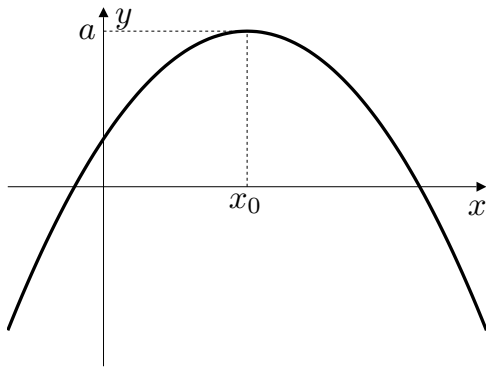
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k  $x_0$  tak se funkční hodnoty přibližují k  $a$ .

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě  $x_0$  se příslušné hodnoty nutně přiblíží k hodnotě  $a$ .

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k  $x_0$  tak se funkční hodnoty přibližují k  $a$ .

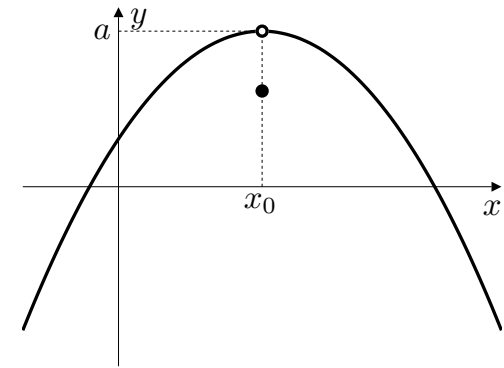
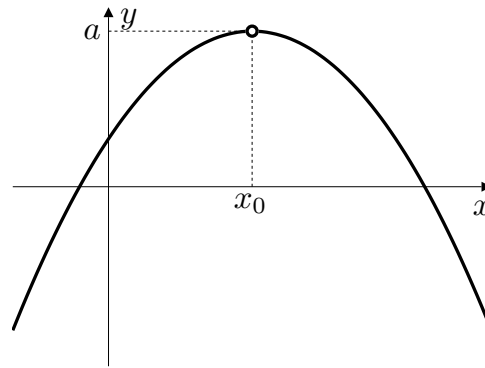
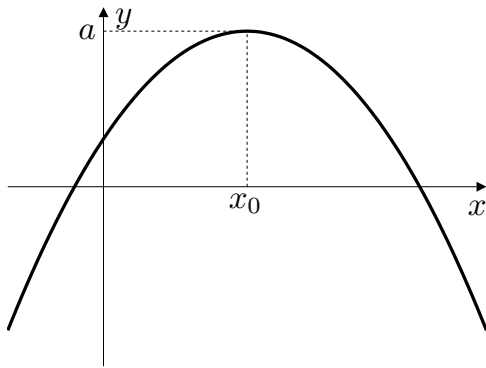
Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě  $x_0$  se příslušné hodnoty nutně přiblíží k hodnotě  $a$ .

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

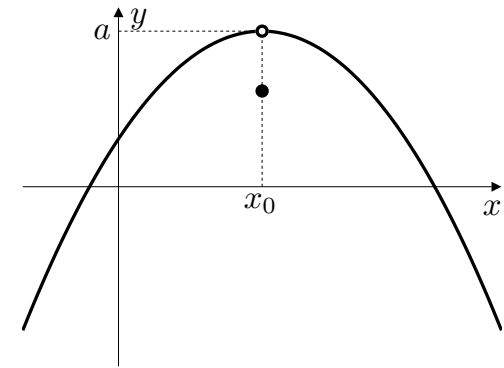
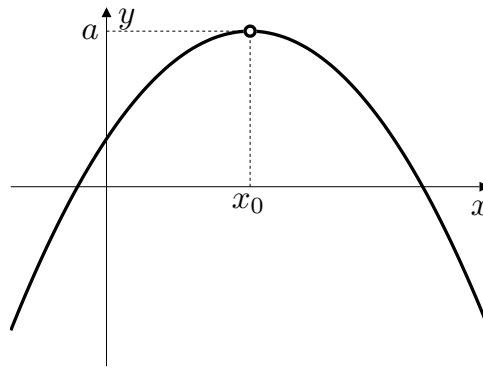
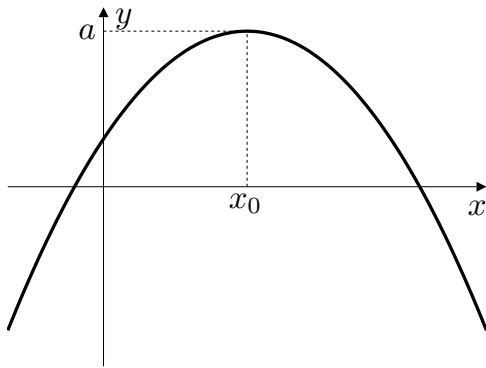


Pokud je funkce  $f$  spojitá v  $x_0$ , tak  $a$  se rovná funkční hodnotě  $f(x_0)$ .

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



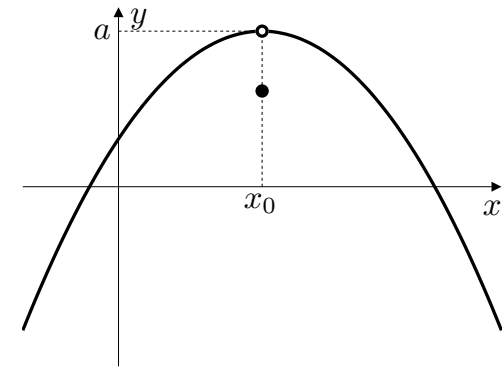
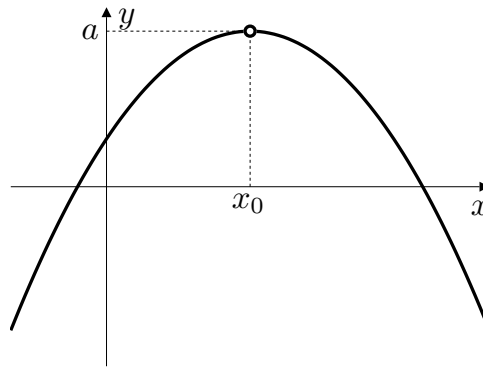
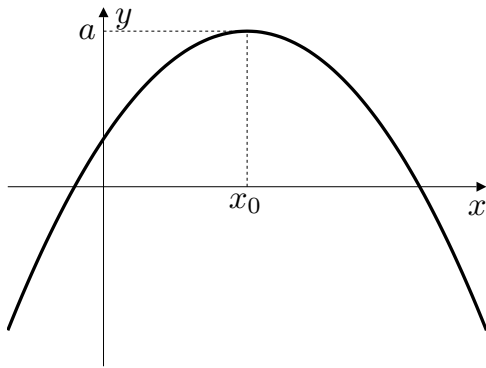
Pokud je funkce  $f$  spojitá v  $x_0$ , tak  $a$  se rovná funkční hodnotě  $f(x_0)$ .

Pokud funkce  $f$  není spojitá v  $x_0$ , tak  $a$  je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v  $x_0$  splňující rovnost  $f(x_0) = a$ , změní funkci  $f$  na funkci spojitou v  $x_0$ .

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :



Pokud je funkce  $f$  spojitá v  $x_0$ , tak  $a$  se rovná funkční hodnotě  $f(x_0)$ .

Pokud funkce  $f$  není spojitá v  $x_0$ , tak  $a$  je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v  $x_0$  splňující rovnost  $f(x_0) = a$ , změní funkci  $f$  na funkci spojitou v  $x_0$ .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce  $f$  je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu  $x_0$  jsou hodnoty z definičního oboru funkce  $f$ .



# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce  $f$  je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu  $x_0$  jsou hodnoty z definičního oboru funkce  $f$ .

$x_0$  je *hromadný bod* definičního oboru.

# Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  limitu  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

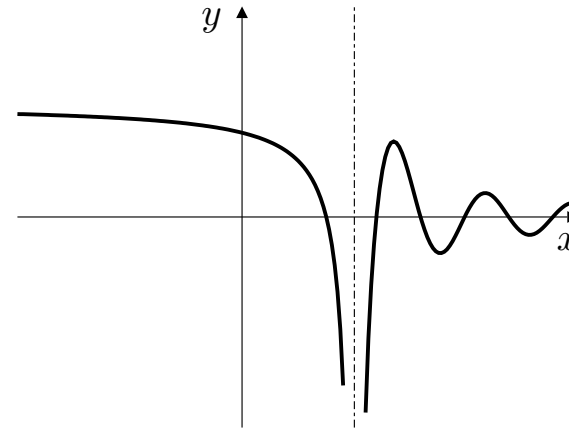
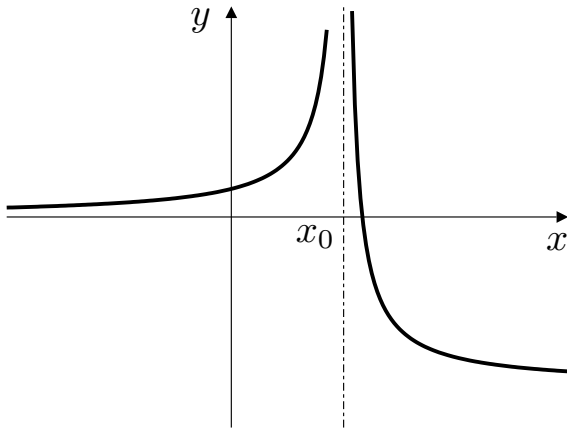
$x_0$  je *hromadný bod* definičního oboru.

# Nevlastní limita

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

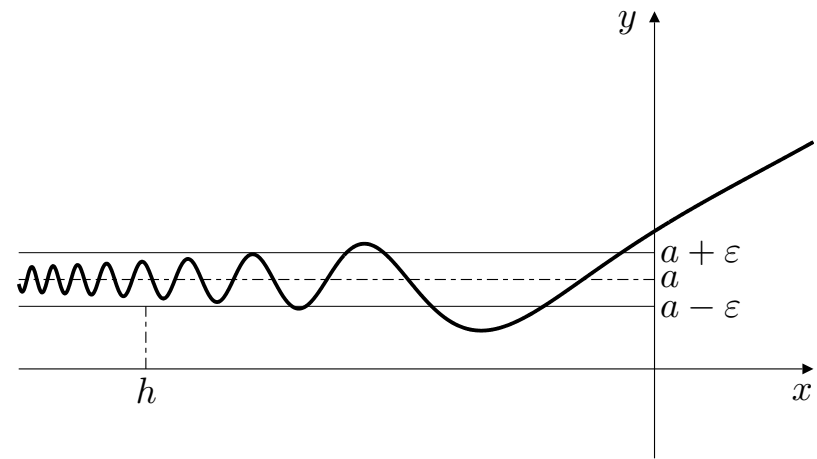
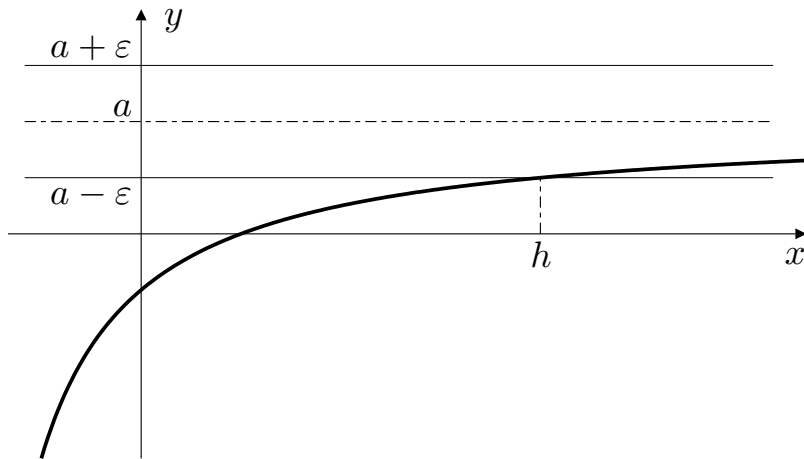


# Limita v nevlastním bodě

Vlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$



# Limita v nevlastním bodě

Nevlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x > h \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x > h \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x < h \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x < h \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$



# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1 : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1},$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1 : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = 0$

$$x \neq 1 : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$



# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \frac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- $f$  spojitá v  $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f$  nespojitá v  $x_0 \in \mathbb{R}$ : najdeme funkci  $g$ , která má na nějakém ryzím okolí bodu  $x_0$  stejné funkční hodnoty jako funkce  $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[ (\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  **neexistuje**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \frac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

## „Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) (-1)^n \infty$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

## „Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) (-1)^n \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m - b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn} \left( \frac{a_n}{b_m} \right) \infty, & m < n \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m - b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn} \left( \frac{a_n}{b_m} \right) (-1)^{n+m} \infty, & m < n \end{cases}$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$



# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

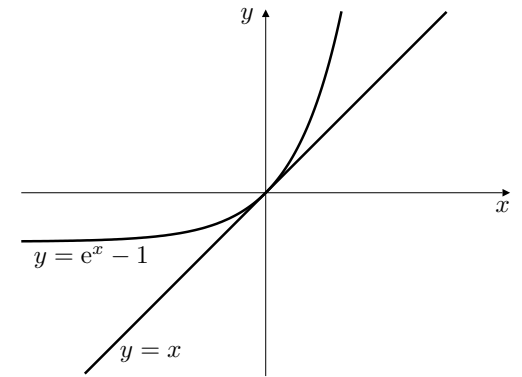
$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

# Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

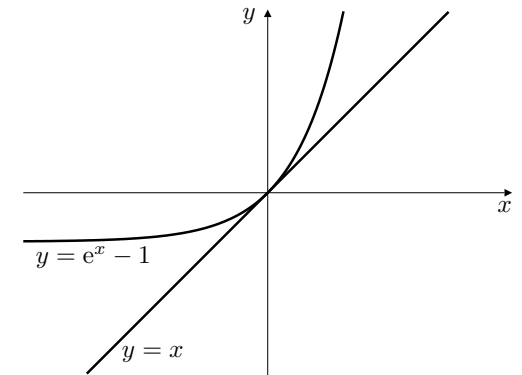


# Výpočet limit

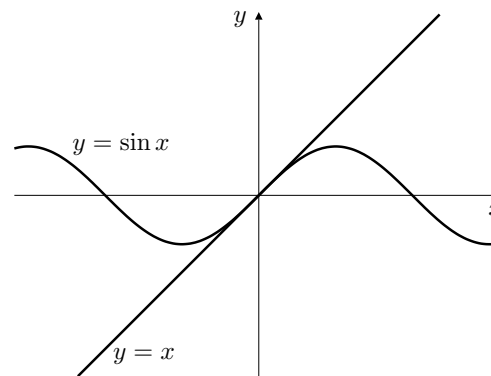
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$



# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{7 - 4x^3}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě  $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{7 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^3} - 4} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 4} = -\frac{1}{2}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$



# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$



# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

# Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$