

6. cvičení z M1035, podzim 2022

Příklad 1. Řešte v \mathbb{R} následující rovnice:

- a) $\log\left(\frac{9}{2} - x\right) = \log\frac{9}{2} - \log x$,
- b) $\log 5 + \log(x + 10) = 1 - \log(2x - 1) + \log(21x - 30)$,
- c) $\log_4 \log_2 \log_3(2x - 1) = \frac{1}{2}$,
- d) $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$.

Řešení. (a) $3/2, 3$,

(b) $3/2, 10$,

(c) 41 ,

(d) $(1 + \sqrt{5})/2$. Použijte vztah $\log_a y = \log_b y / \log_b a$. □

Příklad 2. Najděte nejprve definiční obor a obor hodnot funkce f a pak k ní najděte funkci inverzní.

a) $f(x) = 5^{2x+3} - 8$,

b) $f(x) = 2 \ln(6 - 7x) + 1$.

Řešení. (a) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-8, \infty)$, $f^{-1}(y) = (\log_5(y + 8) - 3)/2$,

(b) $D(f) = (-\infty, 6/7)$, $H(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = (6 - e^{\frac{y-1}{2}})/7$. □

Příklad 3. Nakreslete grafy funkcí a určete periodu těchto funkcí.

a) $f(x) = \sin(3x) - 4$,

b) $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$,

c) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$,

d) $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

e) $f(x) = \cot\left(\frac{x}{3}\right)$.

Příklad 4. Určete definiční obor, obor hodnot, nakreslete grafy funkcí a najděte inverzní funkci

a) $f(x) = \arcsin x$.

b) $f(x) = \arcsin x + 2\pi$.

c) $f(x) = \pi - \arcsin x$.

d) $f(x) = \arccos x + 4\pi$.

e) $f(x) = \pi - \arccos x$.

f) $f(x) = \arctan x + 3\pi$.

g) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

Řešení. (a) $D(f) = [-1, 1]$, $H(f) = [-\pi/2, \pi/2]$, $f^{-1} = \sin y$ na $[-\pi/2, \pi/2]$.

(b) $D(f) = [-1, 1]$, $H(f) = [-3\pi/2, 5\pi/2]$, $f^{-1} = \sin y$ na $[3\pi/2, 5\pi/2]$.

(c) $D(f) = [-1, 1]$, $H(f) = [\pi/2, 3\pi/2]$, $f^{-1} = \sin(\pi - y) = \sin y$ na $[\pi/2, 3\pi/2]$.

(d) $D(f) = [-1, 1]$, $H(f) = [4\pi, 5\pi]$, $f^{-1} = \cos y$ na $[4\pi, 5\pi]$.

(e) $D(f) = [-1, 1]$, $H(f) = [-\pi, 0]$, $f^{-1} = \cos(\pi - y) = \cos y$ na $[-\pi, 0]$.

(f) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [5\pi/2, 7\pi/2]$, $f^{-1} = \tan(y)$ na $[5\pi/2, 7\pi/2]$.

(g) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = [0, \pi]$, $f^{-1} = \tan(\pi/2 - y) = \cot y$ na $[0, \pi]$. □

Příklad. 5. Řešte v \mathbb{R} následující rovnice:

- a) $\sin 2x = \sin x$,
- b) $\cos 3x + \sin 3x = 0$,
- c) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$,
- d) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$,
- e) $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$,
- f) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

Řešení. (a) Použijte vzorec pro dvojnásobný úhel.

(b) Vzpomeňte si na tangens.

(c) Vydělte dvěma a vzpomeňte si na součtové vzorce.

(d) Použijte vzorec pro rozdíl sinů.

(e) Převed'te na kvadratickou rovnici.

(f) Použijte vhodný vzorec. (Součet sinů.)

□