

8. cvičení z M1035, podzim 2022

Příklad 1. Derivujte následující funkce:

- $f(x) = \sqrt[6]{x^7}$, derivace mocniny.
- $f(x) = e^x \cos x$, zopakovat derivaci součinu funkcí, derivaci e^x a derivaci \cos a \sin .
- $f(x) = x^2 e^x - \arctan x$, zopakovat derivaci součtu a rozdílu funkcí, zopakovat derivaci $\arctan x$ a $\arcsin x$.
- $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$, spočítat derivaci \ln jako derivaci inverzní funkce, zopakovat derivaci podílu a derivaci složené funkce.
- $f(x) = \sin^3 x^2$, napsat explicitně jako složení tří funkcí a zderivovat.
- $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$.
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$.
- $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, napište funkci a^x jako $e^{\ln a \cdot x}$.
- $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, napište \log_a pomocí \ln .

Příklad 2. Limity spočítejte buď pomocí známých limit nebo podle l'Hospitalova pravidla. To na přednášce ještě nebylo. Je potřeba ho vysvětlit.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Návod. a) Vyjádřete \log_a pomocí \ln a použijte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

b) Vyjádřete $a^x = e^{x \ln a}$ a použijte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

c) Udělejte záměnu $x = \frac{1}{y}$ pro $y \rightarrow \infty$ a použijte, že $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} = 0$.

d) Počítejte limitu $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. □

Příklad 3. Spočítejte limity podle l'Hospitalova pravidla:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

Příklad 4. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0 : (Je potřeba říci jak, na přednášce to ještě nebylo.)

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x_0 = 1.$

b) $f(x) = x^2 - x + 1, x_0 = 3.$