

13. cvičení z M1035, podzim 2022

V pondělí jsme udělali úlohy 1a), 2, 3, 4, 5. Úlohy 1b) a 1c) jsme spočítali už v minulém cvičení.

Příklad. 1. Spočítejte určité integrály

a) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx,$

b) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx,$

c) $\int_0^1 x \ln x \, dx.$

Příklad. 2. Vypočtěte obsah plochy, která je ohraničena křivkami $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x - 1$ pro $x \geq 0$.

Řešení. $\frac{1}{4} + \ln 2$ □

Příklad. 3. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ kolem osy x pro $x \in [0, a]$.

Řešení. $\frac{\pi}{4} \left(\frac{e^{2a}}{2} + 2a - \frac{e^{-2a}}{2} \right)$ □

Příklad. 4. (Objem anuloidu) Určete objem tělesa, které vznikne rotací elipsy

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

kolem osy x .

Řešení. 24π □

Příklad. 5. Spočítejte délku křivky $y = \ln x$ na intervalu $[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

Řešení. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ □

Příklad. 6. Spočítejte délku křivky $y = x^{\frac{3}{2}}$ na intervalu $x \in [0, 1]$.

Řešení. $\frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8)$ □

Příklad. 7. Vypočtěte nevlastní integrály

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3},$

d) $\int_{-1}^1 \ln |x|,$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$

f) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3},$

g) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x.$