

## 14. cvičení z M1035, podzim 2022

**Příklad 1.** Uvažujme jednoduchou chemickou reakci  $A + B \rightarrow C$ . Koncentrace  $z(t)$  látky  $C$  se v průběhu reakce postupně mění podle diferenciální rovnice

$$z' = k(z - a)(z - a), \quad z(0) = 0.$$

Vyřešte tuto rovnici a načrtněte graf funkce  $z(t)$  pro  $t \geq 0$ .

Řešení.  $z(t) = \frac{a^2 kt}{akt+1}$  □

**Příklad 2.** Logistická diferenciální rovnice pro růst populace je

$$P' = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \quad P(0) = P_0.$$

Vyřešte ji a nakreslete křivky, které jsou jejími řešeními pro různé počáteční hodnoty. (Tato rovnice je modifikací rovnice  $P' = kP$ , která říká, že když populace dosáhne hodnoty  $K$ , přestane růst.)

Řešení.  $P(t) = \frac{KAe^{kt}}{1+ Ae^{kt}}$ ,  $A = \frac{K-P_0}{P_0}$ . □

**Příklad 3.** Zjistěte, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice:

a)  $y(t) = e^{-t} + t e^{-t}$ ,  $y'' + 2y' + y = 0$ ,

b)  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{c-x^2}}$ ,  $y' = xy^3$ ,

c)  $y = \frac{1+Ce^t}{1-Ce^t}$ ,  $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ .

**Příklad 4.** Řešte rovnice se separovanými proměnnými a v rovině se pokuste nakreslete grafy těchto řešení:

a)  $2y - x^3 y' = 0$ . Všimněte si, že  $y(x) \equiv 0$  je řešení.

b)  $1 + y^2 + xy y' = 0$ ,

c)  $xy y' = 1 - x^2$ ,

Řešení. (a)  $y(x) = C e^{-1/x^2}$

(b)  $C = (y^2 + 1)x^2$

(c)  $y^2 = -x^2 + 2 \ln |x| + C$  □

**Příklad 5.** Řešte dané počáteční úlohy:

a)  $xy' + y = y^2$ ,  $y(-1) = \frac{1}{2}$ . Všimněte si, že  $y(x) \equiv 0$  a  $y(x) \equiv 1$  jsou řešení a že pro  $x = 0$  a  $y = 0$  nebo  $y = 1$  může být derivace  $y'(0)$  jakákoliv.

b)  $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ ,

c)  $2(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $y(0) = 0$ .

Řešení. (a)  $y = \frac{1}{1-x}$ .

(b)  $\sqrt{2} \cos y = \cos x$ .

(c)  $y^2 = \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$ . □

**Příklad 6.** Spočítejte nevlastní integrály:

- a)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$
- b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$
- c)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3},$
- d)  $\int_{-1}^1 \ln|x|,$
- e)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$
- f)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3},$
- g)  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x.$