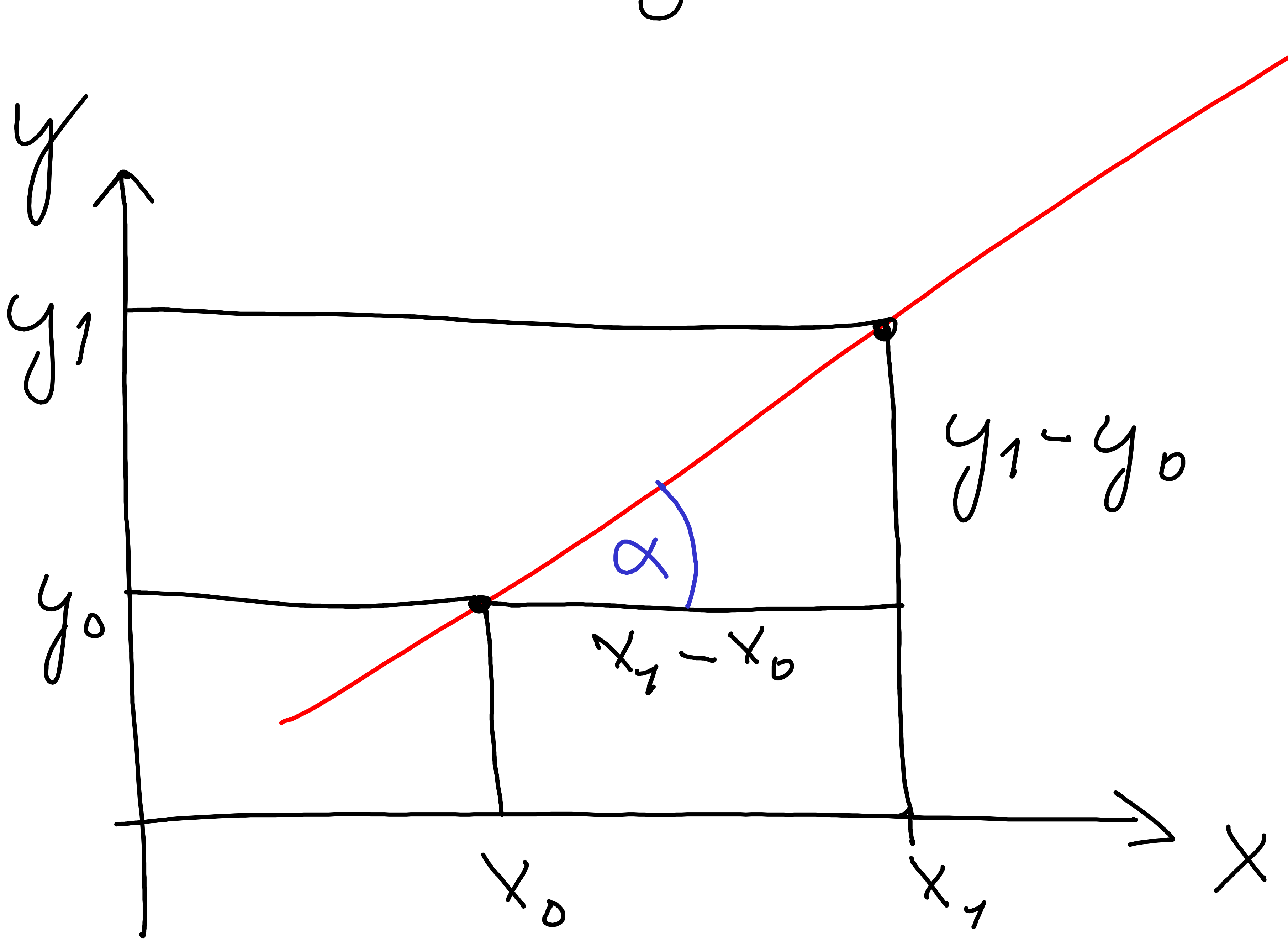
Derivace funkce

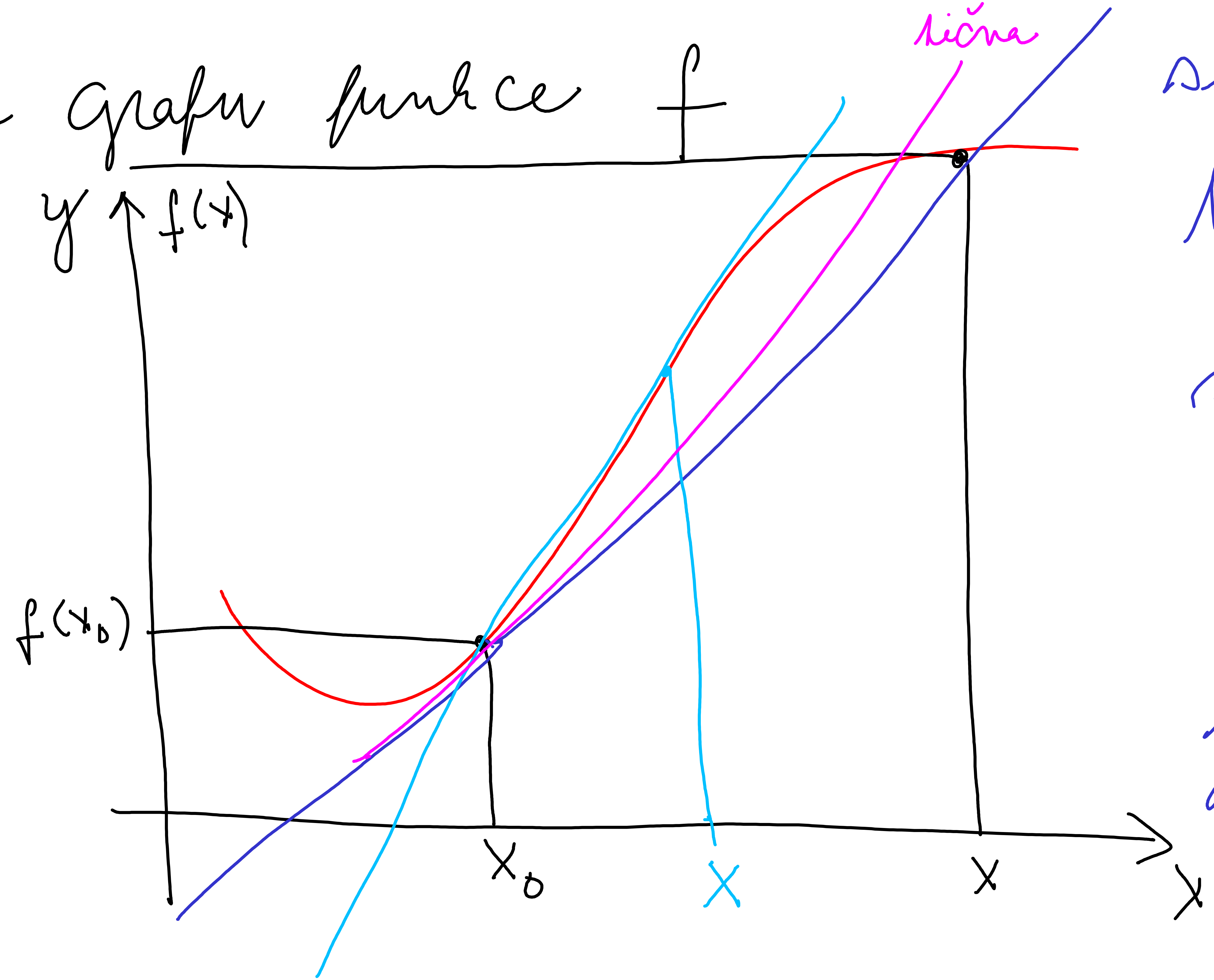
Směrnice přímky procházející body (x_0, y_0) a (x_1, y_1), $x_0 \neq x_1$.



směrnice je podíl

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

Sečna grafu funkce f



sečna grafu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$

směrnice sečny je

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Jestliže se x blíží k x_0, pak se sečny blíží k tečně grafu funkce f v bodě x_0

Směrnice sečen se pak blíží ke směrnici tečny a tato směrnice tečny je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

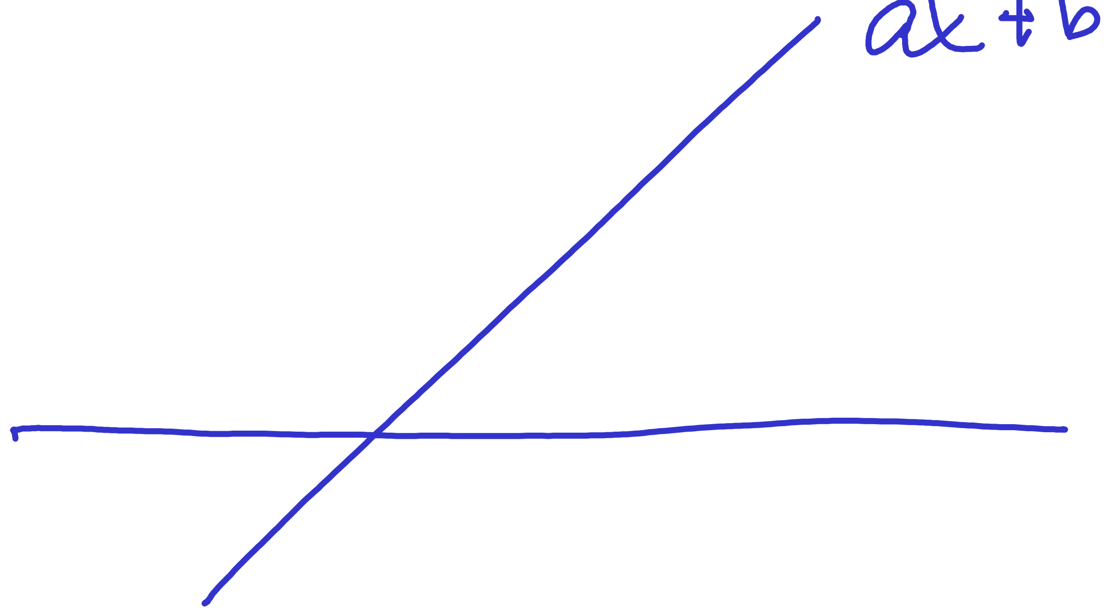
Toto číslo nazýváme DERIVACE FUNKCE f v bodě x_0 (pokud existuje)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivace některých funkcí

Místo $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ budeme počítat

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



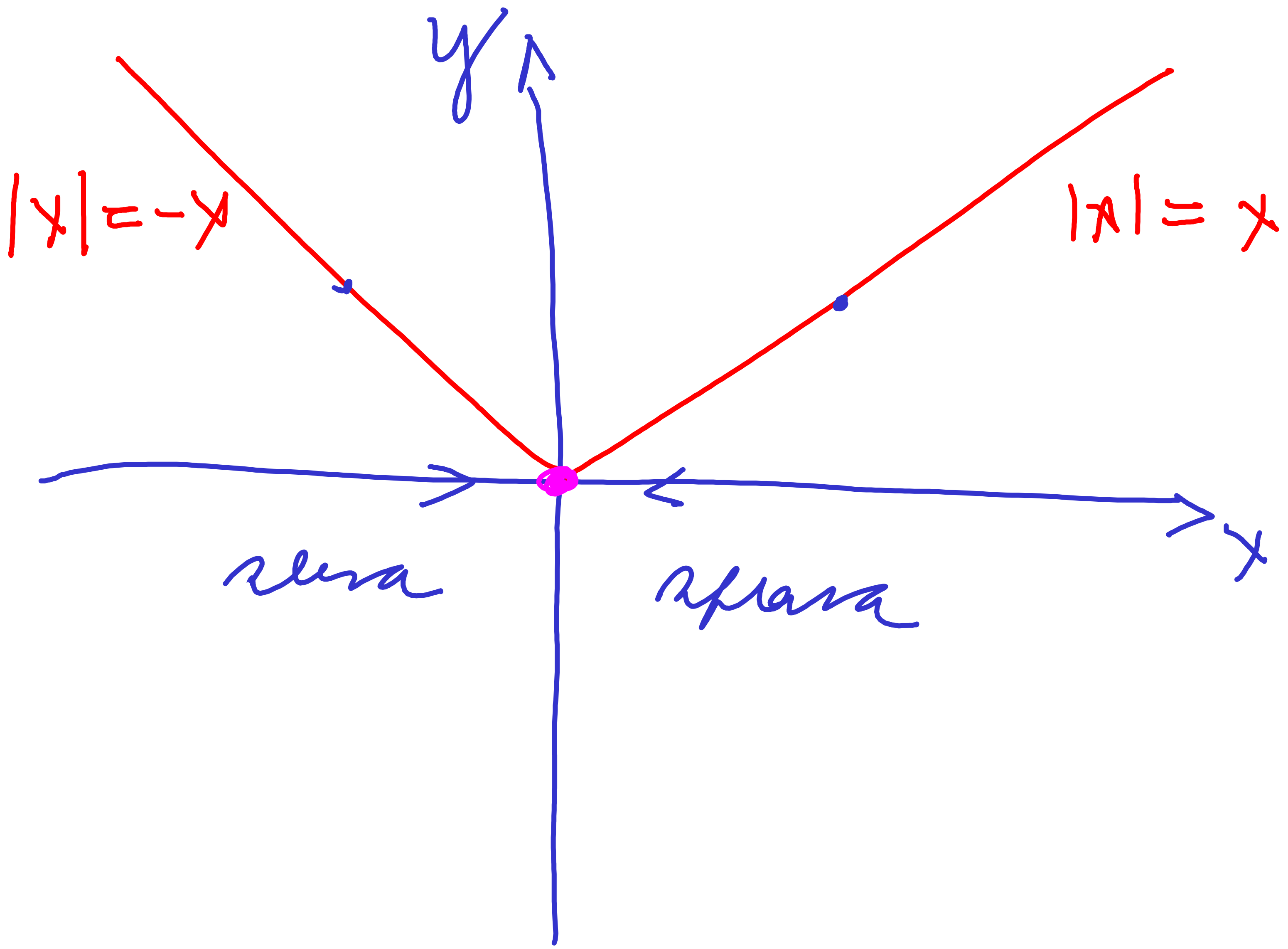
① $f(x) = k$ $\Rightarrow$ konstantní funkce

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

② $f(x) = ax + b$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0+h)+b - (ax_0+b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

③ $f(x) = |x|$



$x_0 > 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \underline{\underline{1}}$$

$x_0 + h > 0$ pro h malé

$x_0 < 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim \frac{-(x_0+h) - (-x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \underline{\underline{-1}}$$

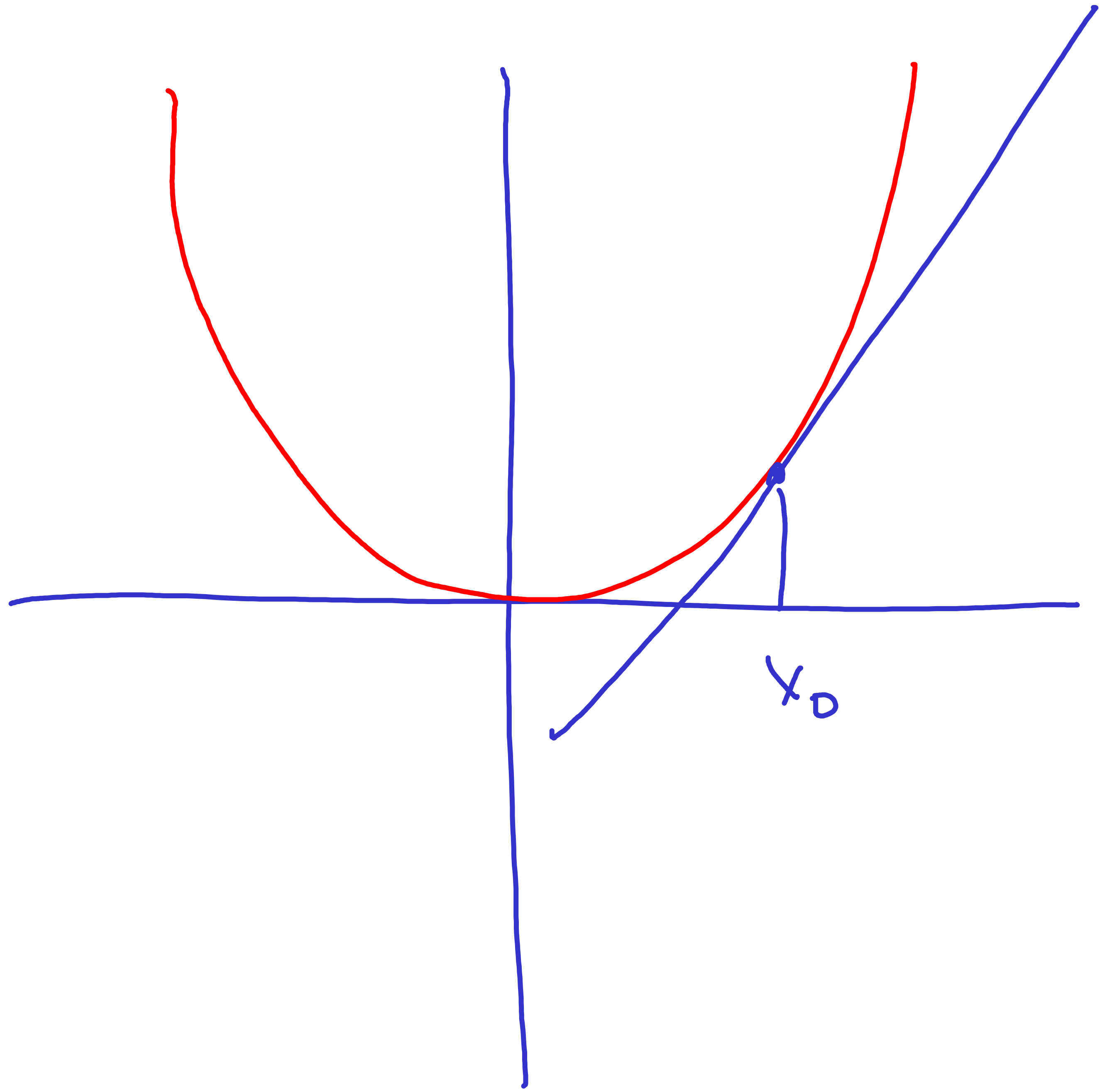
$x_0 + h < 0$ pro h malé

(4) $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

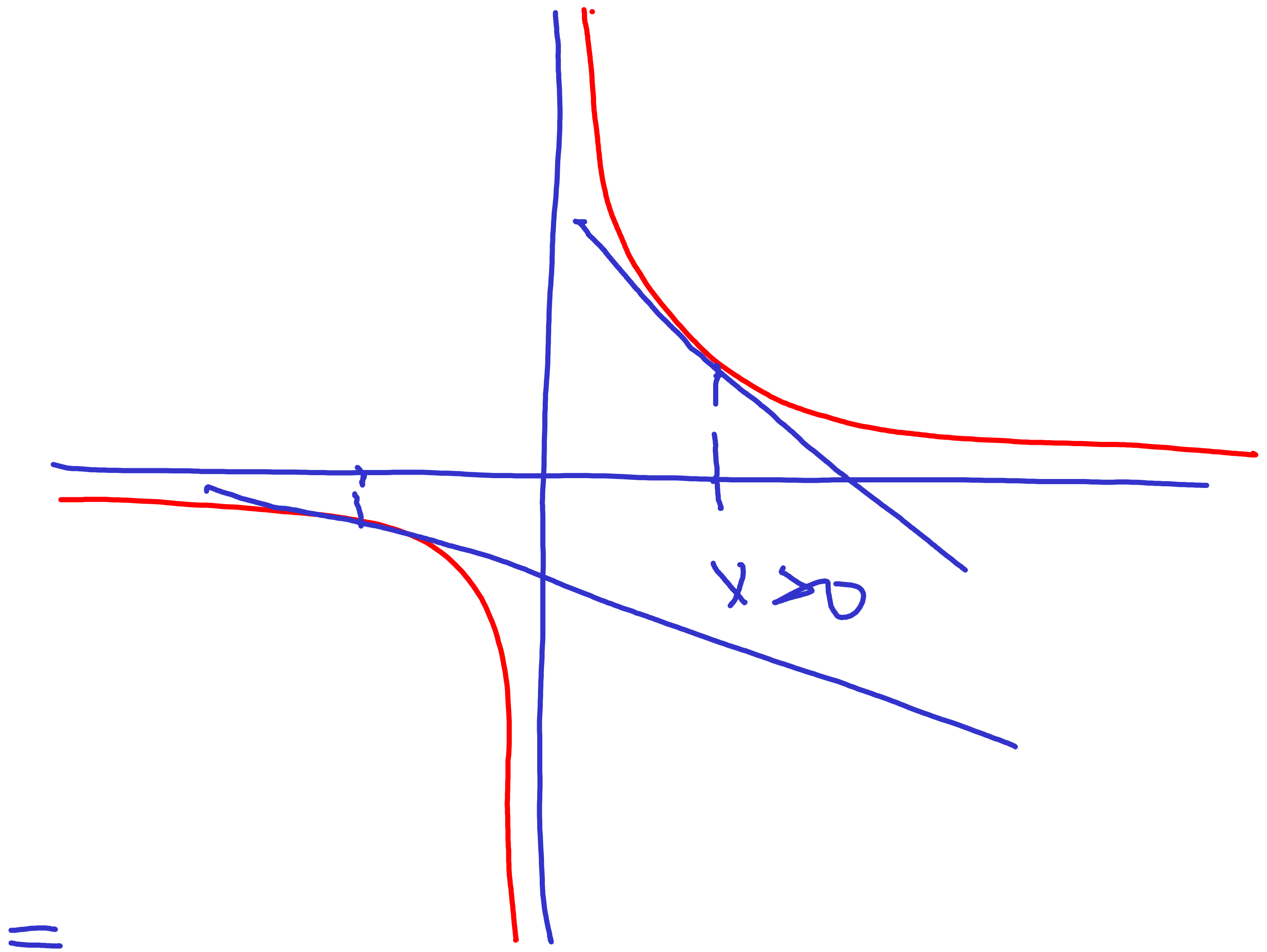


5 $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x+h)\,x\,h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{(x+h)\,x} = -\frac{1}{x^2}$$



⑥ $f(x) = x^n$ $\boxed{n \geq 1 \quad \text{celé číslo}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} h + \dots h^2 \dots h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim \frac{n x^{n-1} h + \circ h^2 \dots \circ h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(n x^{n-1} + \circ h + \dots \circ h^{n-1} \right)$$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \qquad = n x^{n-1}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

(7) $n < 0$ celé číslo

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-2}$$ tohle jsme odvodili

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = (-3)\,x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

(8) Derivace goniometrických funkcí

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

vzorec pro rozdíl sinů

(9) Analogicky spočítame, že

$$(\cos x)' = -\sin x$$

(10) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = (e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x$$

$$(e^x)' = e^x$$

11 $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{x}}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Pravidla pro derivování

① Derivace součtu a rozdílu

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

② Derivace součinu

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

③ Derivace podílu $\quad g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Příklady:

$f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2$

$f \cdot g(x) = x^5 \qquad (f \cdot g)'(x) = 5x^4$

$$\parallel$$

$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 3x^2 \cdot x^2 + x^3\, 2x = 5x^4$

$\frac{f(x)}{g(x)} = x \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 1 \qquad \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} = \frac{3x^2 \cdot x^2 - x^3\, 2x}{x^4} = \frac{1 \cdot x^4}{x^4} = 1$

④ Derivace složené funkce

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

$$h'(x) = (x^6)' = 6 \cdot x^5 \quad f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2$$

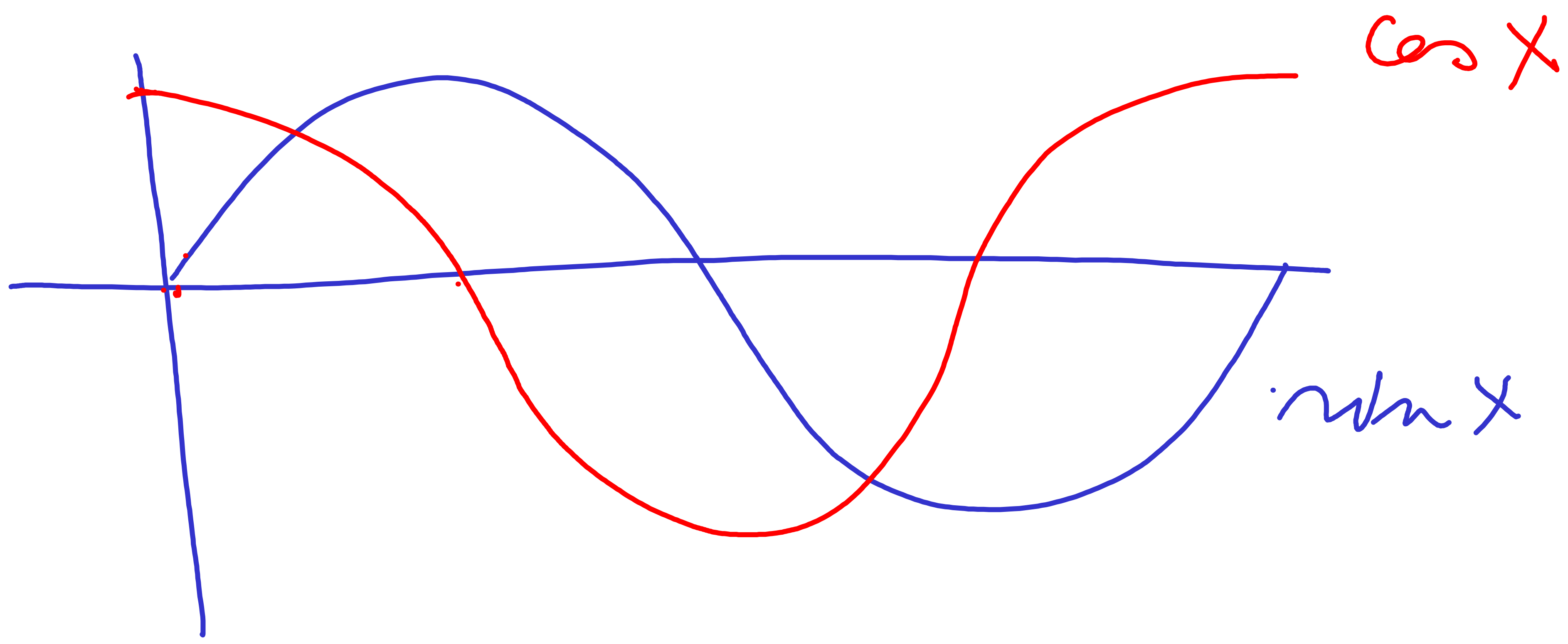
$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x^3) \cdot 3x^2 = (2x^3) \cdot 3x^2 = 6x^5$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1}$$

$$= 1 \cdot \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$



Derivace zleva

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Derivace zprava

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1$ a derivace $f'(0)$ neexistuje (kdyby existovala, byla by $f'_-(0) = f'_+(0)$)

$f'_-(0) = -1$

Příklad

$f(x) = x^2 \cdot \sin x$

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x\, 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$h(x) = \ln(1+x^2)$$

$$h'(x) = \ln'(1+x^2) \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (0+2x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

5 Derivace inverzní funkce

Nechť f^{-1} je inverzní k funkci f a nechť derivace f ve všech bodech je nenulová.

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

<u>Příklad</u> $\ln x$ je inverzní k e^x

Víme, že $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Vzorec pro derivaci inv. fce dává

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$=$$

$$f'(f^{-1}(x))$$

Derivace cyklometrických funkcí

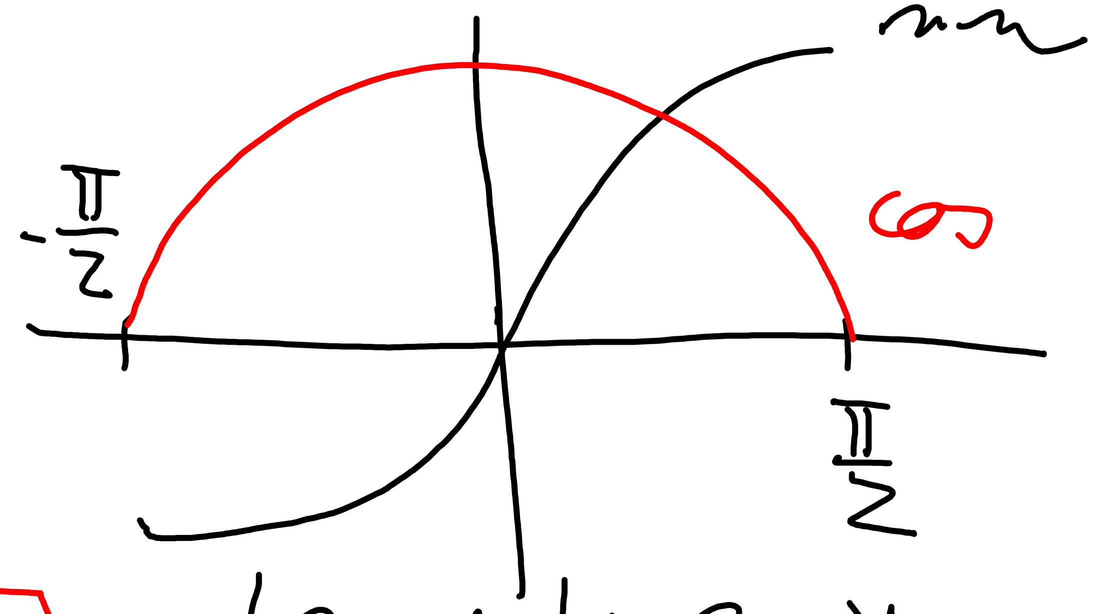
arcsin x je inverzní funkce k sin x na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$

$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin x(\arcsin x) = x$



$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$|\cos x| = \cos x$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ na $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Závěr: Derivace $\arcsin x$ je

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{na } (-1,1)$$

Obdobně lze spočítat

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivace funkce arctg x (je inverzní k tg x na $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)}$$

Výpočet $(\operatorname{tg} x)'$ $\qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pokračujeme se výpočtem $(\operatorname{arctg} x)'$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = *$$

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$* = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

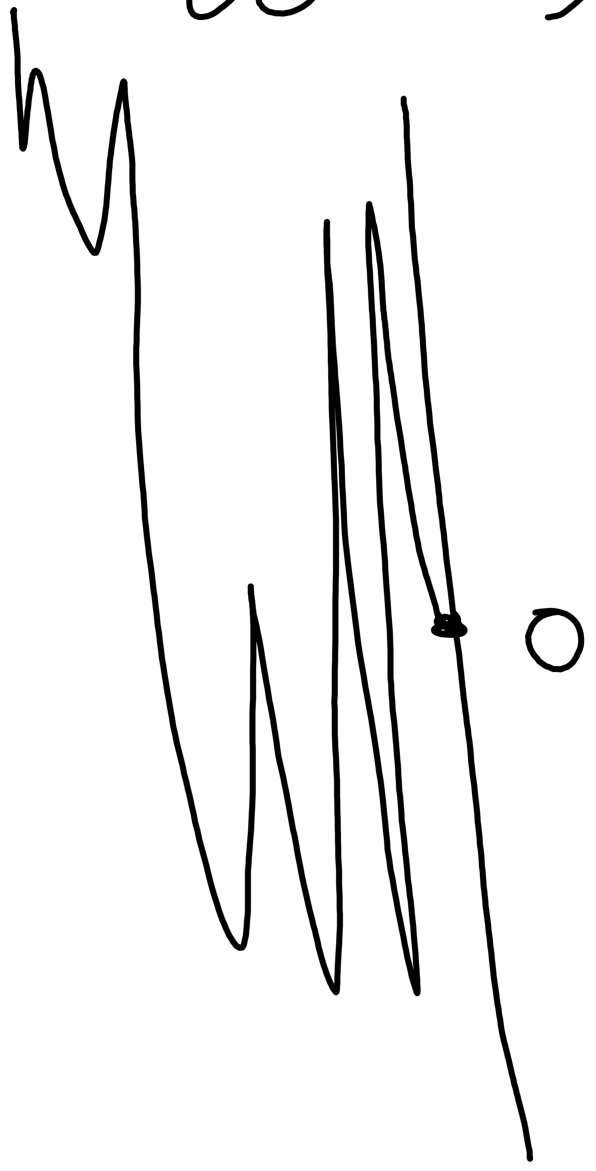
Závěr

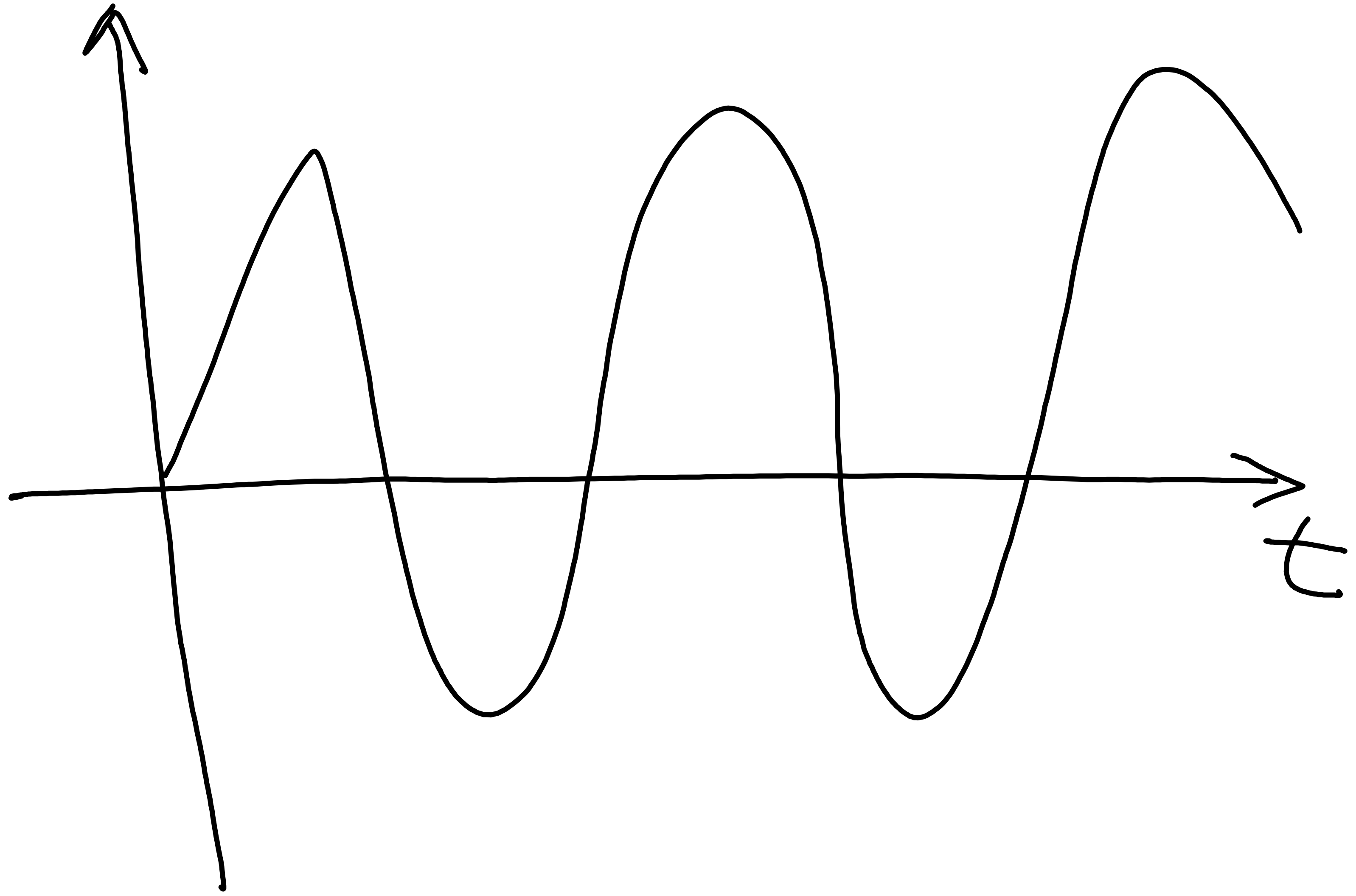
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Fyzikální význam derivace

Hmotný bod se pohybuje po přímce, za čas t se dostane do bodu $f(t)$ = vzdálenost od počátku ($\pm$)





Funkce $f(t) = s(t)$

Průměrná rychlost mezi časy t_0 a t_1 je

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$ je okamžitá rychlost v čase t_0

a současně derivace funkce $s(t)$

v bodě t_0.