Matematika pro biochemiky

Skripta prof. Došla Matematika pro chemiky
I. a II. díl

Středošk. mat. Kučera, Herman, Šimša
Sbírka úloh ze středošk. mat.

Ke zkoušce (1) chodit na cvičení a dělat DÚ

2 DÚ ji půlka získat 50% bodů

bonifikace z bodů nad 50%

× (2) Písemka opakovat semestru 20%

(3) Písemka u zkoušky 80%

Množiny ... objekty určené svými prvky

$x \in M$ x je prvkem množiny M

- množiny popisujeme výčtem

$$M = \{1, 3, 8, 9\}$$

- pomocí vlastnosti

$$M = \{\underbrace{x \in \mathbb{Z}}_{\text{celá čísla}} ; -8 \leq x < 139\}$$

Číselné množiny

$\mathbb{N}$ přirozená čísla $1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{Z}$ celá čísla, $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\mathbb{Q}$ racionální čísla, lze psát ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$

$q \in \mathbb{N}, \ p \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$ racionální + iracionální $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\pi \in \mathbb{R}, \ \pi \notin \mathbb{Q}$

Operace s reálnými čísly $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$A \subseteq B \quad \underbrace{\forall a}_{\text{pro každé } a} \in A \quad a \in B$$

$A \subset B$ znamená, že $A \subseteq B$, ale $A \neq B$.

sčítání, násobení, prvky 0 a 1, fungují podle známých pravidel

$a+b=b+a$, $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$, $a+0=a$, $a\cdot 1 = a$,

$\forall a \; \exists (-a) \quad a+(-a)=0 \qquad a-b \underset{\text{def}}{=} a+(-b)$, $\forall a \neq 0 \; \exists a^{-1} \quad a\cdot a^{-1}=1$

$b \neq 0 \qquad a : b \underset{def}{=} a \cdot b^{-1}$

Počítání s nerovnostmi

$\forall c \qquad a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$\forall c > 0 \qquad a < b \Rightarrow ac < bc$

$\forall c < 0 \qquad a < b \Rightarrow ac > bc$

$2 < 3 \qquad \underset{-8}{\underset{\parallel}{2(-4)}} \;>\; \underset{-12}{3(-4)}$

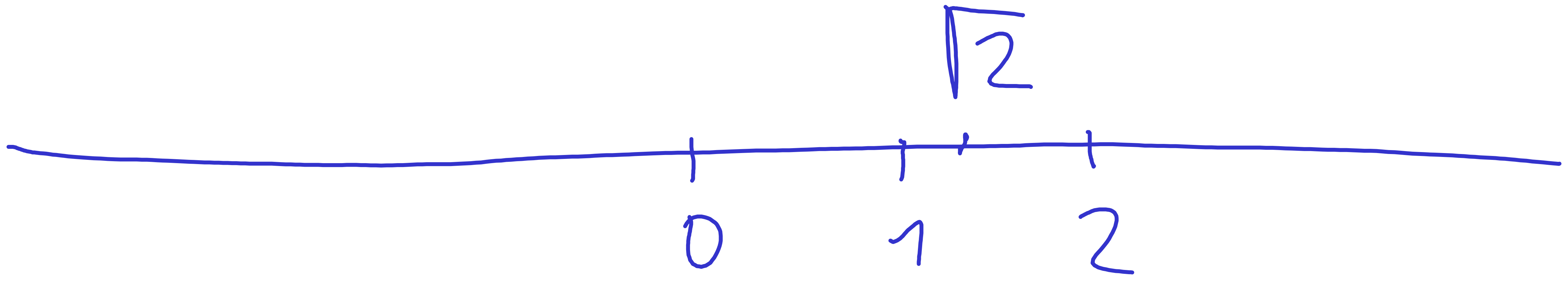
Kartézský součin množin

$A \times B = \{[a,b],\ a \in A,\ b \in B\}$

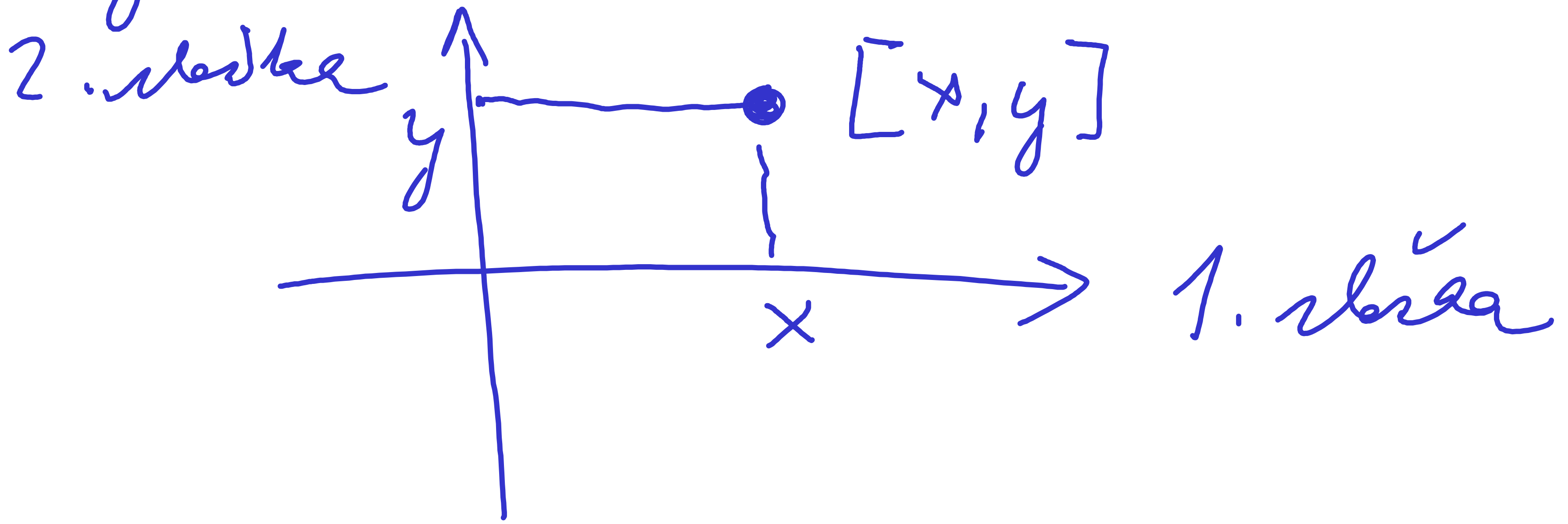
$A \times B \times C = \{[a,b,c],\ a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dvojice reálných čísel

Prvky $\mathbb{R}$ znázorňujeme na přímce



Prvky $\mathbb{R}^2$ znázorňujeme v rovině



Intervaly – podmnožiny v $\mathbb{R}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ otevřený interval

$\langle a,b \rangle = [a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ uzavřený

$(a,b\rangle = (a,b]$

$\langle a,b) = [a,b)$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$ $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$

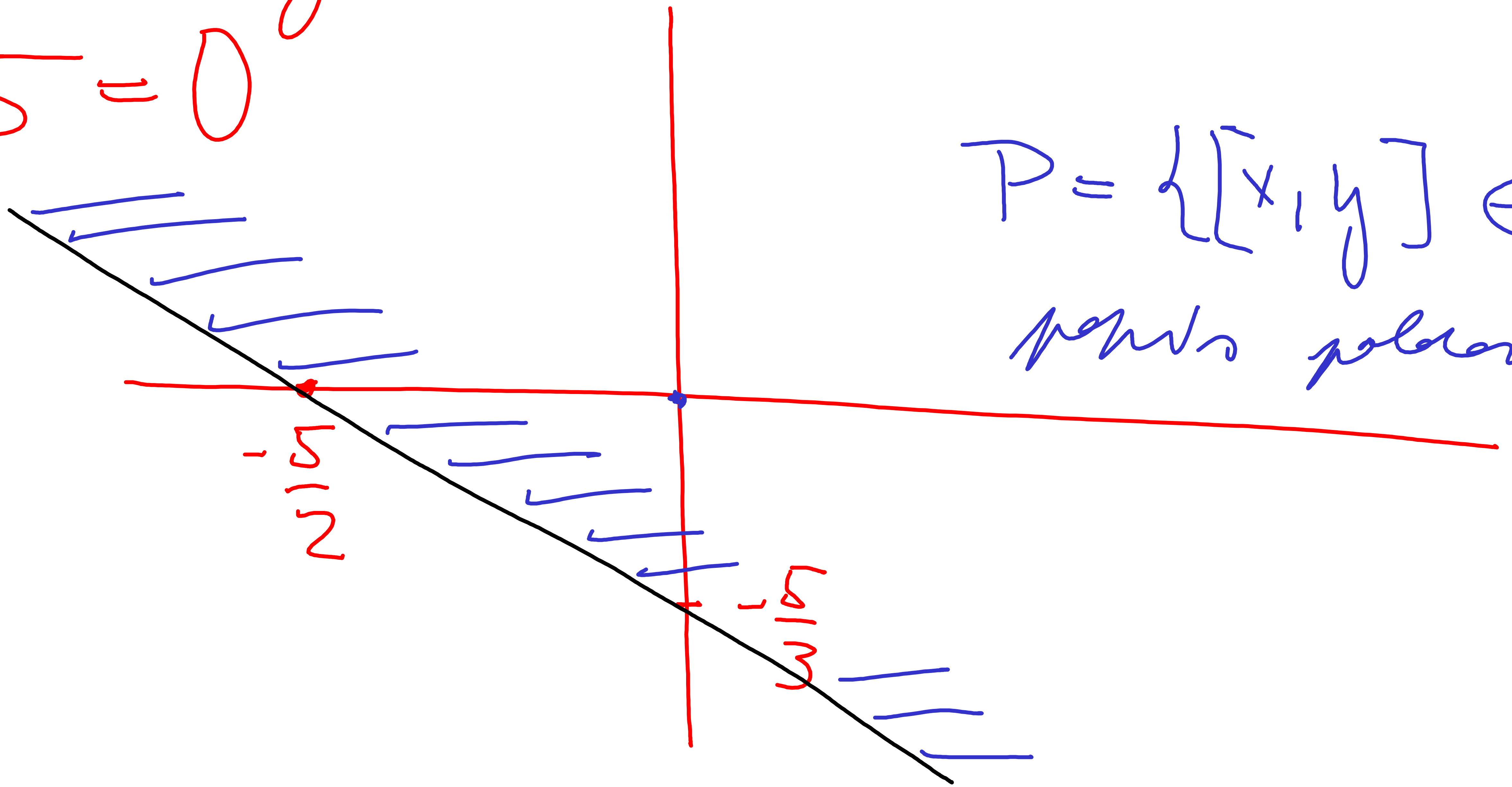
Příklad

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 ;\ ax+by+c=0\}$ pro pevně zvolená čísla a, b, c

$a \neq 0$ nebo $b \neq 0$

Tato množina popisuje přímku v rovině

$2x+3y+5=0$



$P = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 ;\ 2x+3y+5 \geq 0\}$

popis poloroviny

Z rovnice $2x + 3y + 5 = 0$ lze vyjádřit y pomocí x

$$2x + 5 = -3y$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = y$$

Zde dostáváme funkci

$$y = f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

Funkce

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkce

$$f : D \to \mathbb{R}$$

přiřazuje každému číslu $x \in D$ právě jedno číslo $f(x) \in \mathbb{R}$.

Množina D se nazývá definiční obor. $D(f) = D$.

Množina $H(f) = \{ y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D,\ f(x) = y \}$

– množina hodnot funkce f

Funkce - zadání

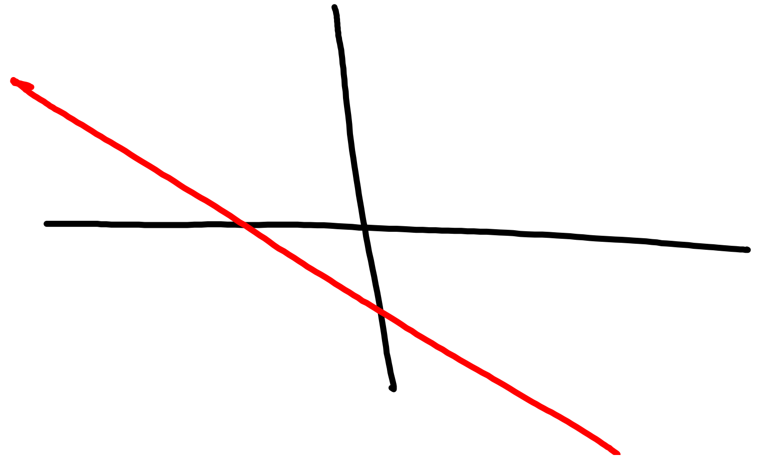
(1) tabulkou $D = \{1, 2, 5\}$

x	1	2	5
$f(x)$	3	7	11

(2) předpisem

$$f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, \quad \text{nebo} \quad f(x) = 4x^2 - 3x + 9$$

Graf funkce f je znázornění množiny $\{[x, f(x)] \in D \times \mathbb{R}\}$

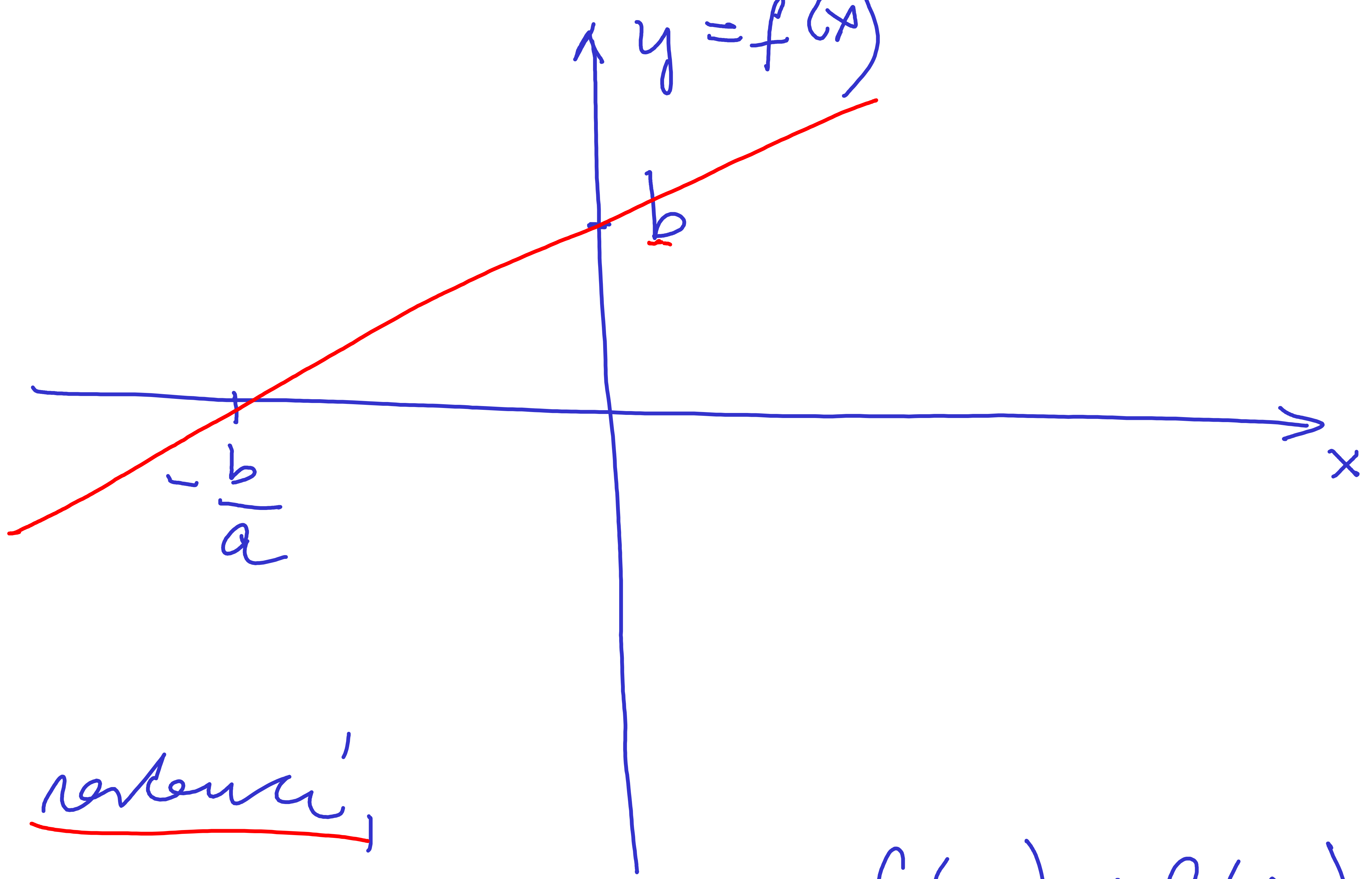


Lineární funkce

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax + b$

a, b konstanty

a směrnice lin. funkce



Pro $a > 0$ je $f(x) = ax + b$ rostoucí

$x_1 < x_2 \quad / \cdot a > 0$

$ax_1 < ax_2 \quad / + b$

$ax_1 + b < ax_2 + b$

$f(x_1) < f(x_2)$

funkce f je rostoucí, jestliže platí $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Funkce f je klesající, jestliže $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

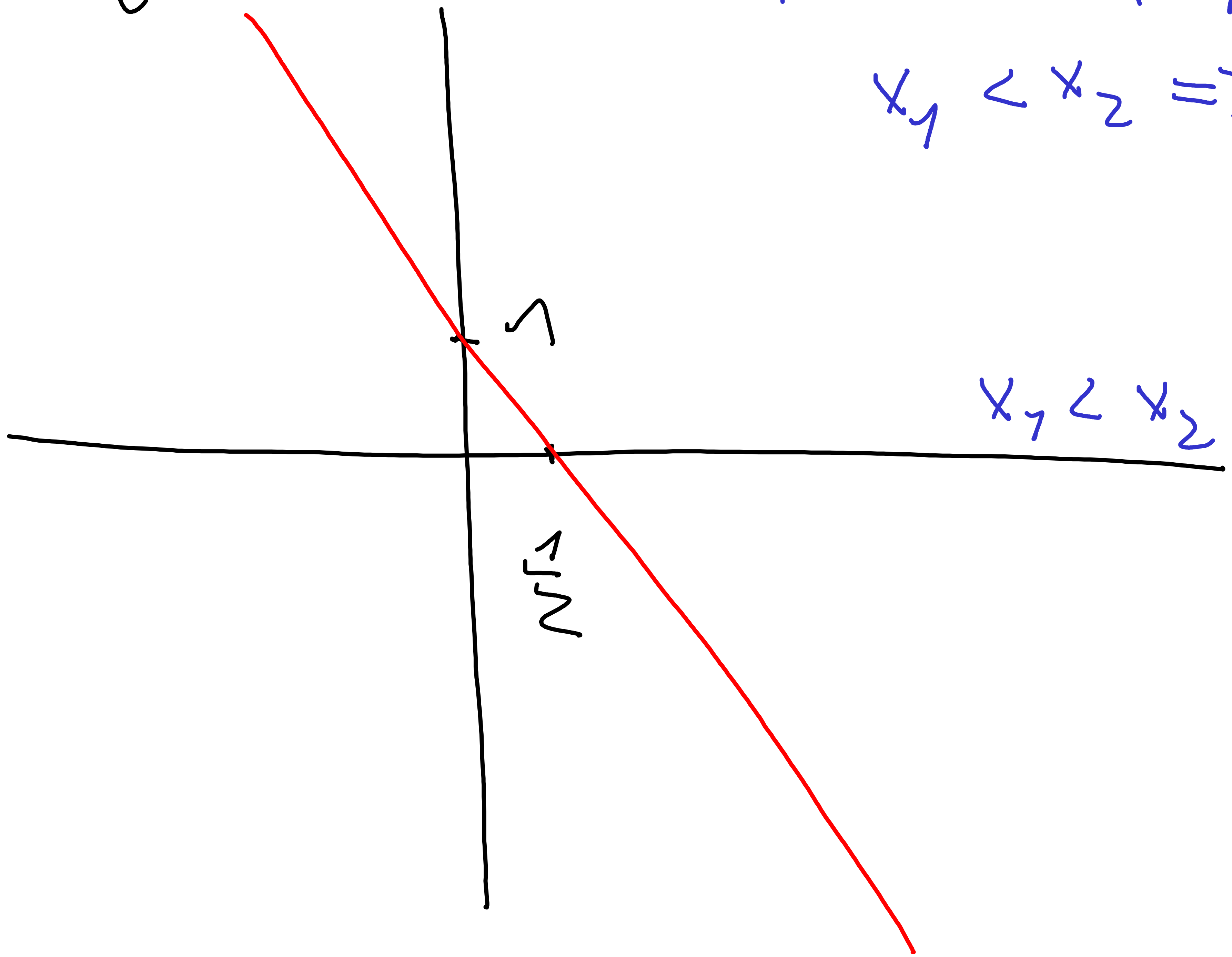
$f(x) = -2x + 1$ je klesající

$$x_1 < x_2 \quad / \cdot (-2)$$

$$-2x_1 > -2x_2 \quad / +1$$

$$-2x_1 + 1 > -2x_2 + 1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$



Funkce f je nerostoucí

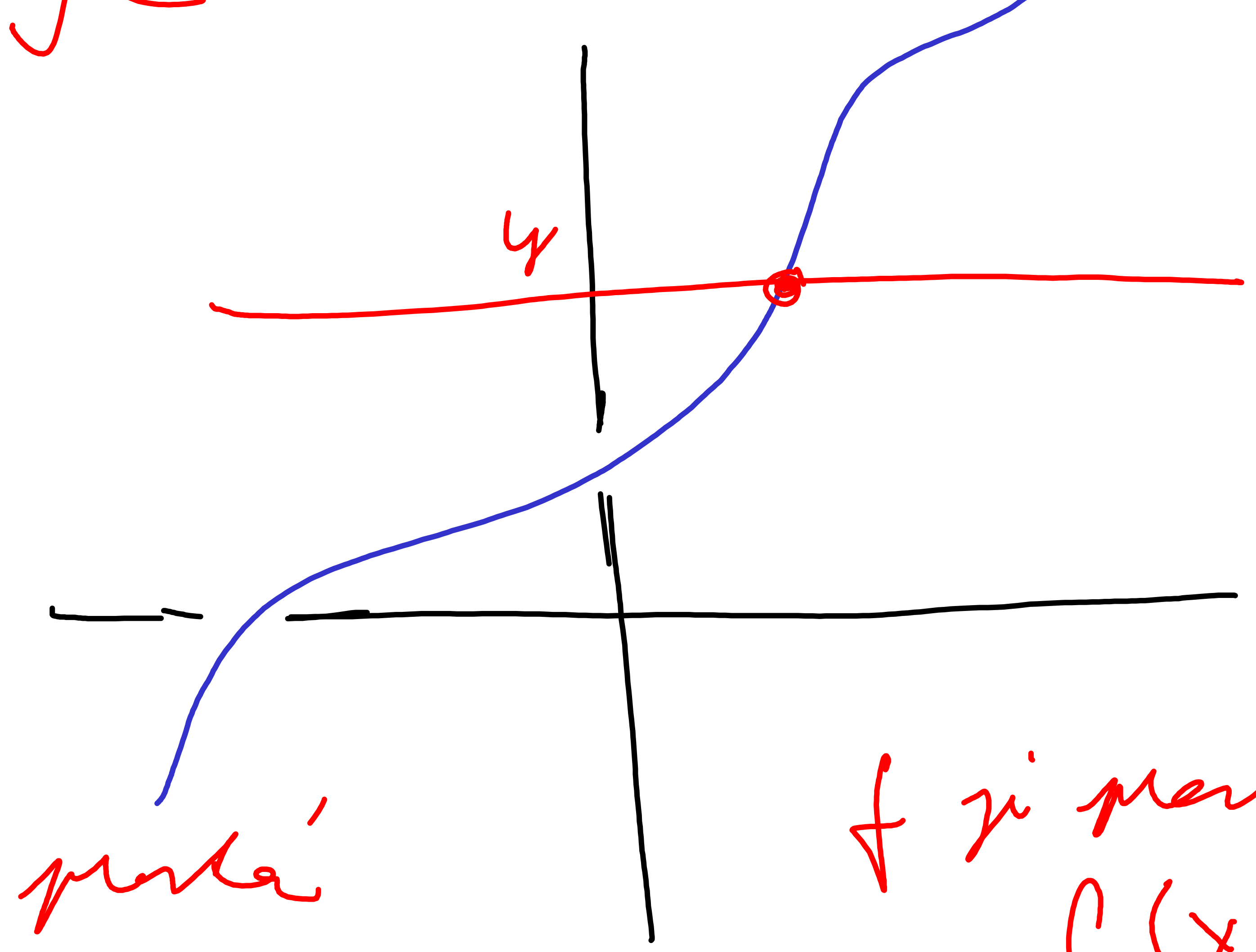
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

neklesající

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Prostá funkce $\quad f : D \to \mathbb{R}$

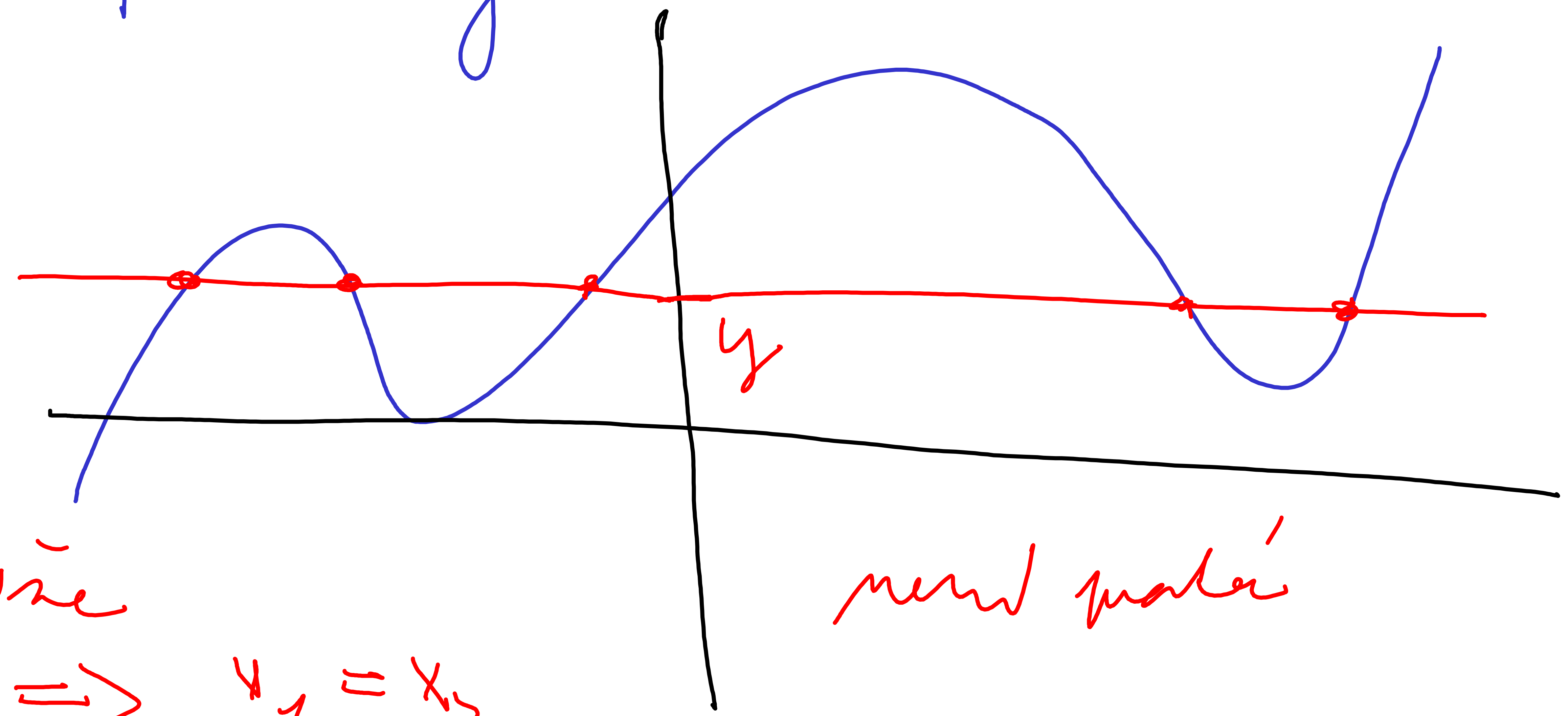
Funkce f je prostá, jestliže pro každé $y \in H(f)$ existuje jediné $x \in D$ tak, že $f(x) = y$



prostá

f je prostá, jestliže

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

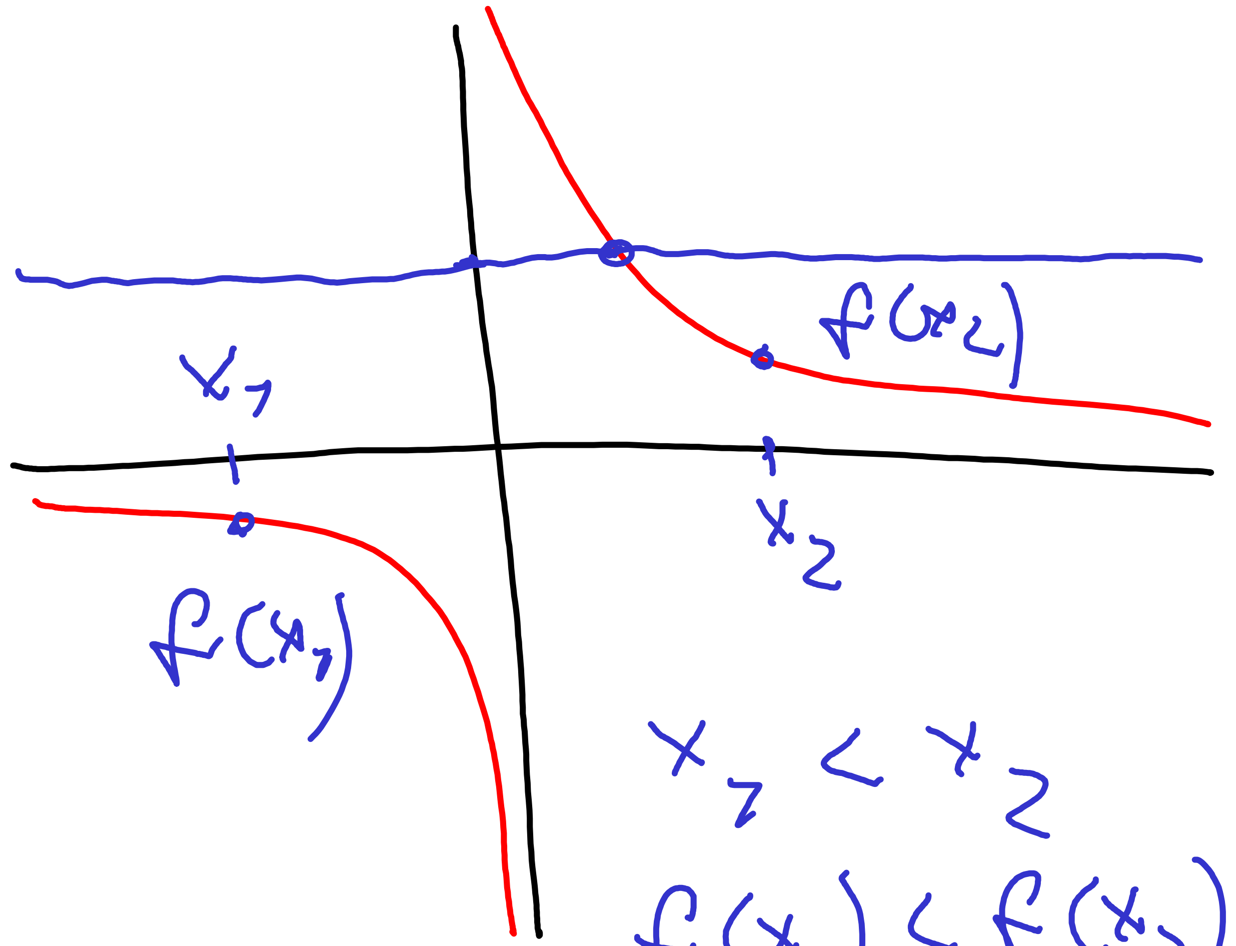


není prostá

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ rostoucí $\Longrightarrow$ f je prostá

klesající $\Longrightarrow$ f je prostá

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

f je prostá, ale

f není rostoucí na D

f není klesající na D

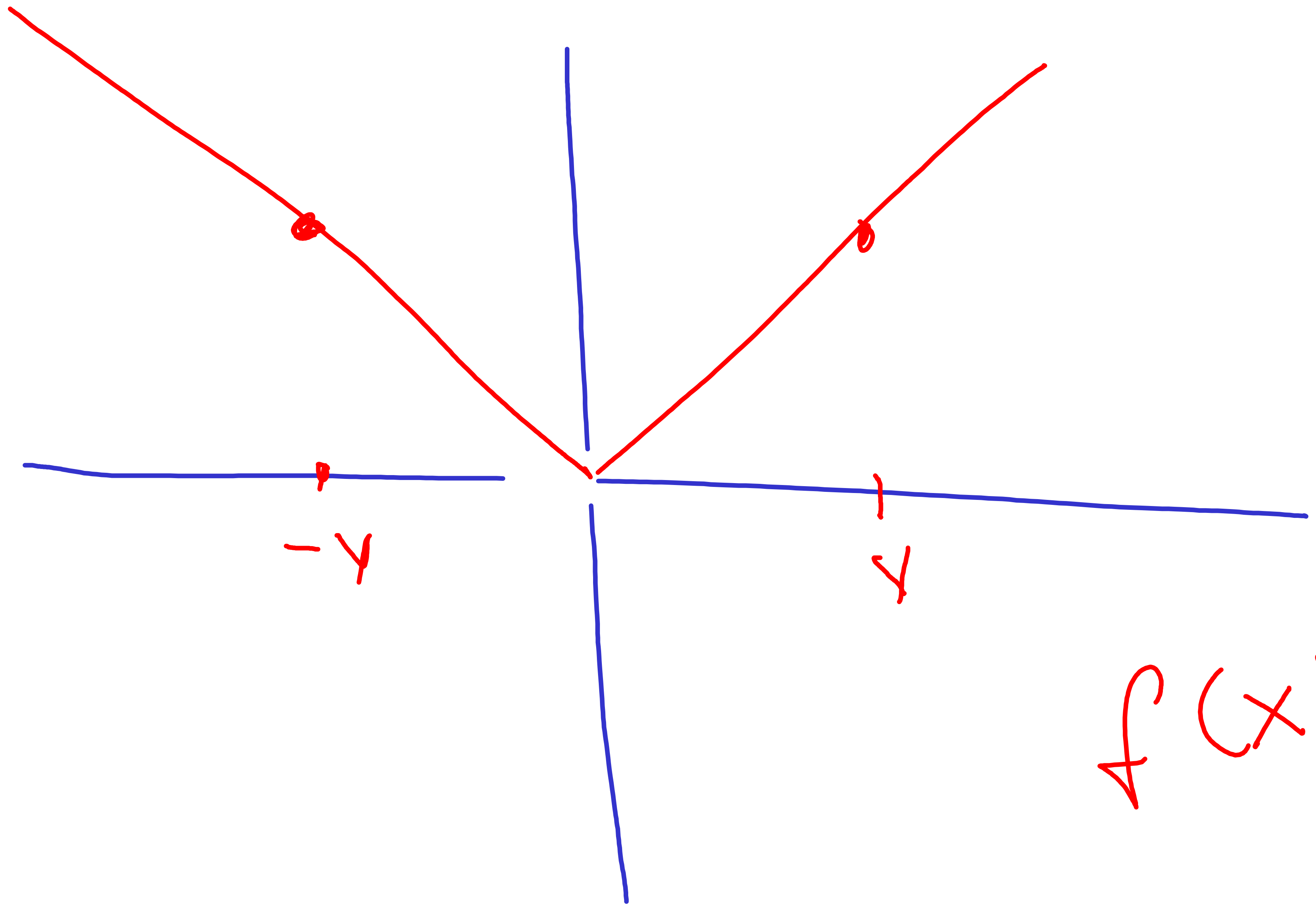
f je klesající na $(-\infty, 0)$

na $(0, \infty)$

Absolutní hodnota reálného čísla $x \in \mathbb{R}$

Definice

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$f(x) = |x|$

na $(-\infty, 0]$ klesající

na $[0, \infty)$ rostoucí

$f(x) = f(-x)$ sudá funkce

Skládání funkcí

$f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$H(g) \subseteq D(f)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

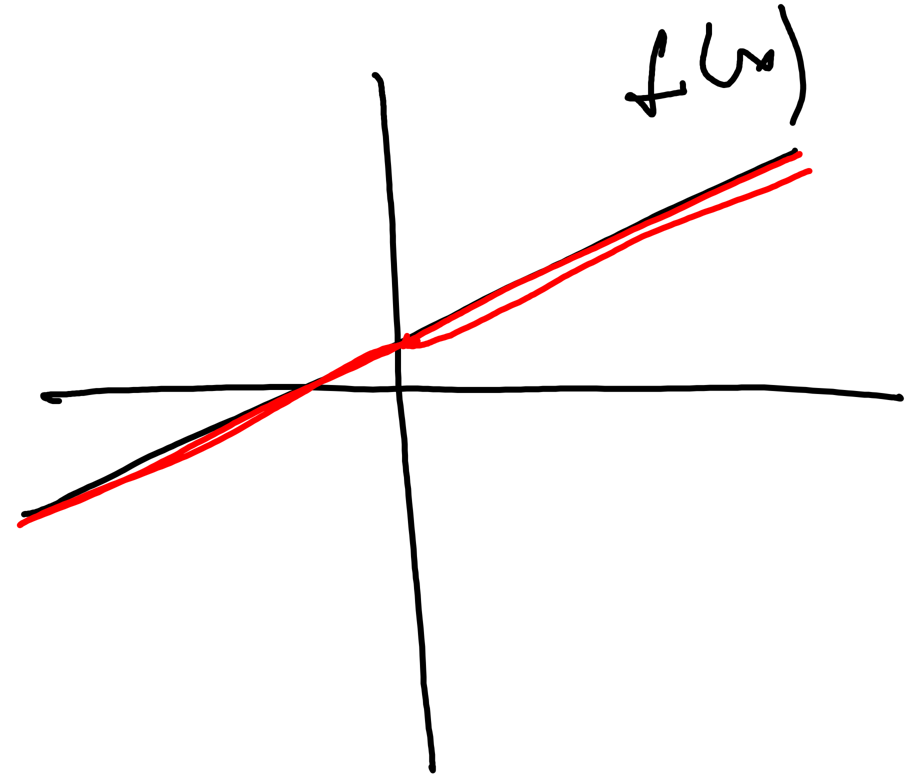
$f(x) = ax + b$

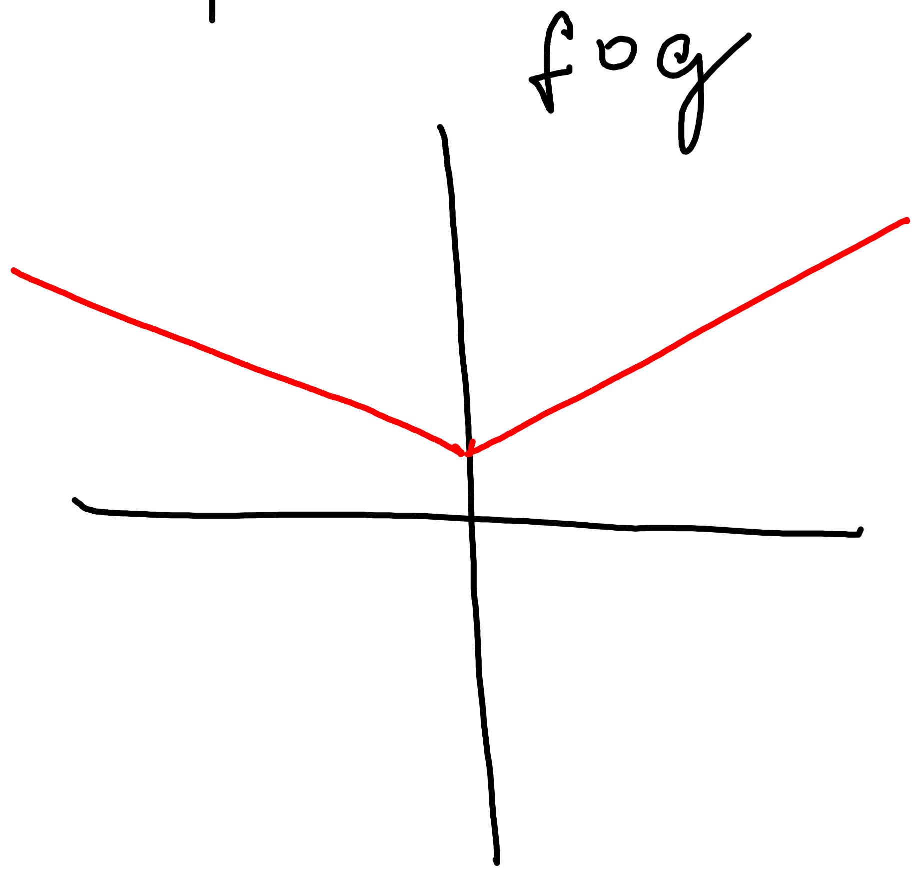
$g(x) = |x| \qquad H(g) = [0, \infty)$

$\cap|$

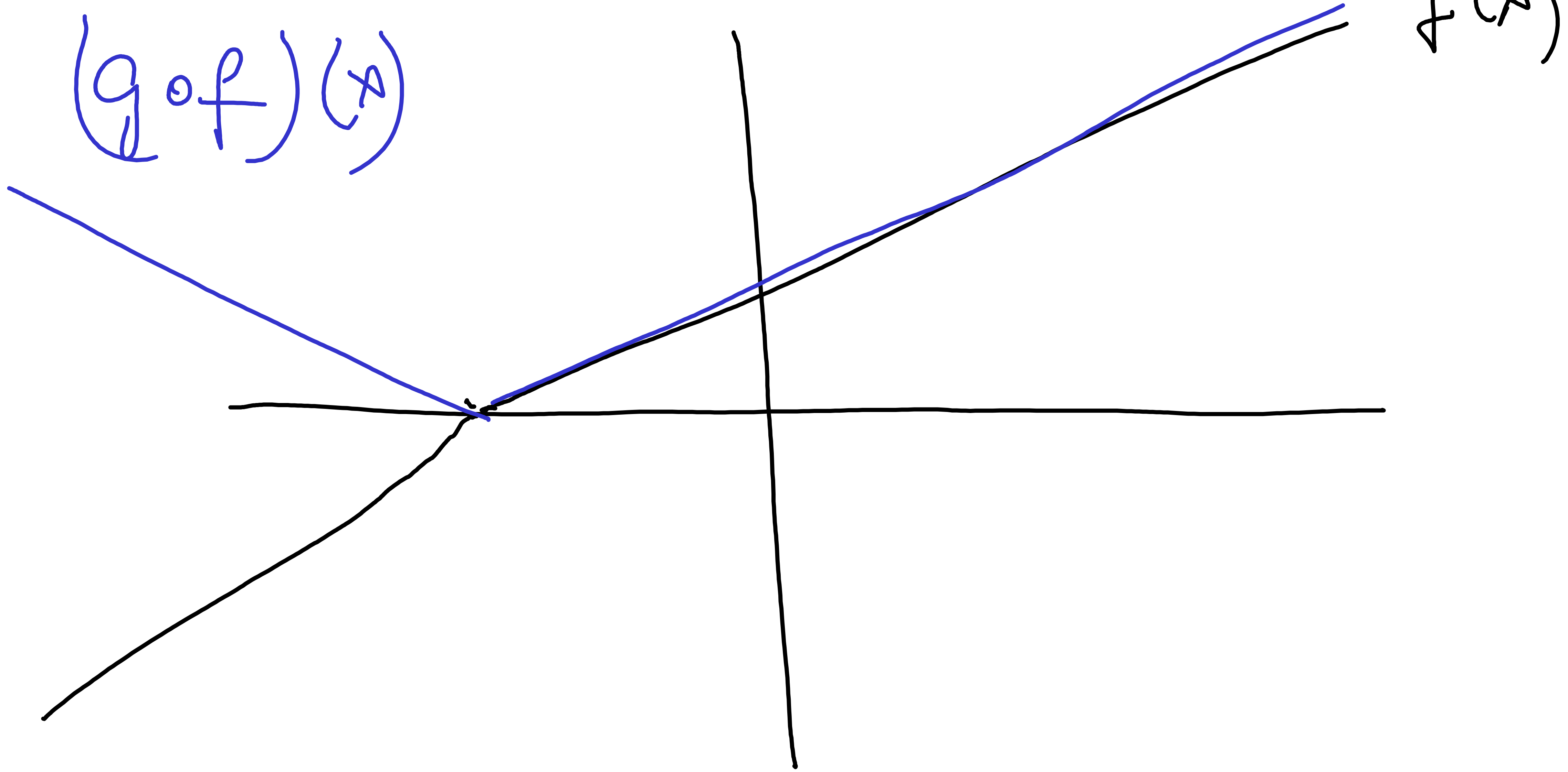
$D(f) = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = a|x| + b$





$$(g \circ f)(x) = |ax+b|$$



Inverzní funkce

Je-li $f(x): D \to \mathbb{R}$ prostá, pak k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}: H(f) \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{právě když} \quad y = f(x)$$

Příklad

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

$$y = 2x + 3$$

$$y - 3 = 2x \quad /:2$$

$$\frac{y-3}{2} = x$$

Platí: $\forall x \in D(f)$ $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

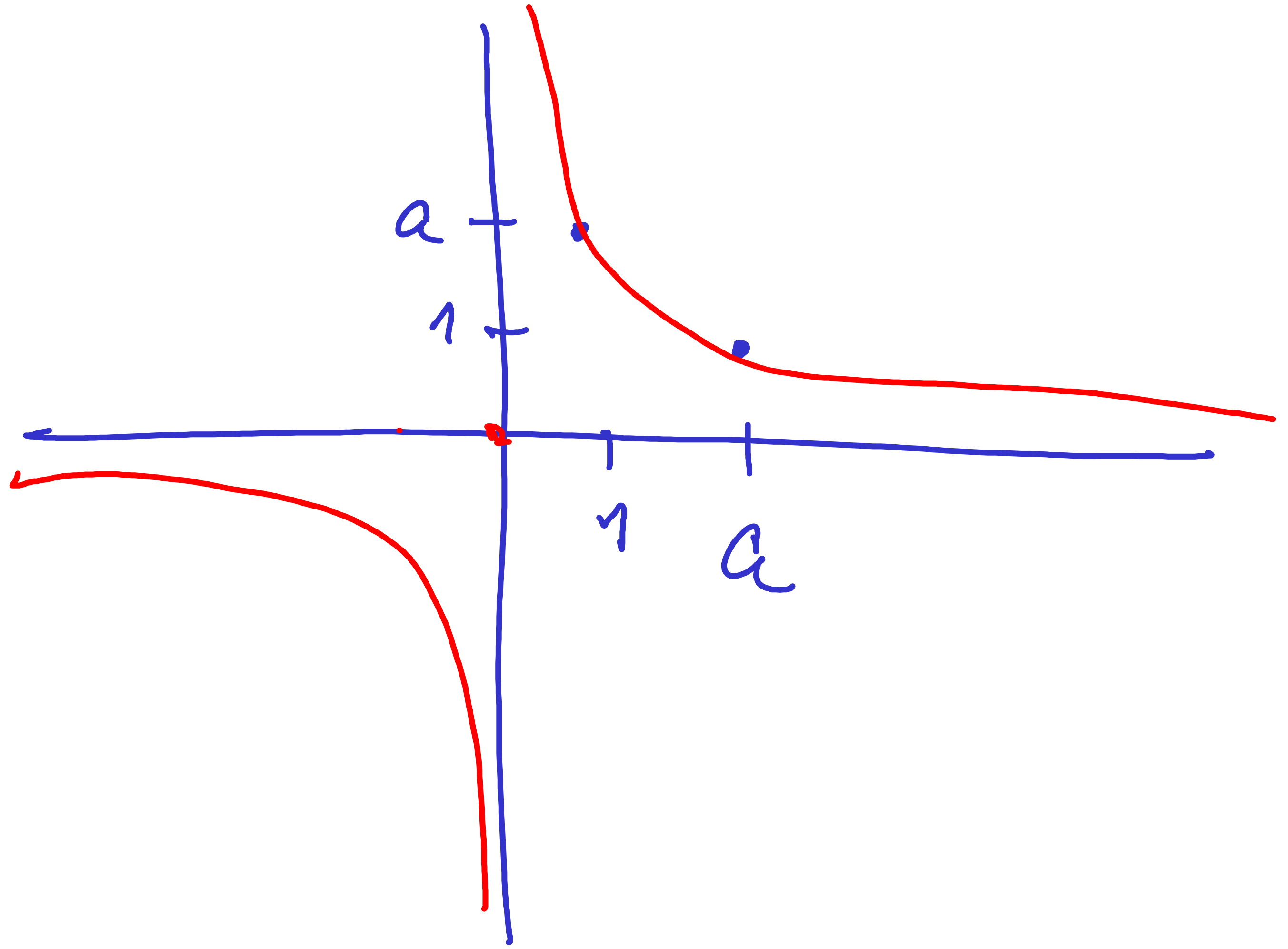
$\forall y \in H(f) = D(f^{-1})$ $\quad f(f^{-1}(y)) = y$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right)+3 = y-3+3 = y$$

Příklad Nepřímá úměrnost

$$f(x) = \frac{a}{x}, \quad a > 0 \text{ konstanta}$$



Platí

$$f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$$

lichá funkce

f je prostá

spočítáme f^{-1}

$$y = \frac{a}{x} \quad / x$$

$$xy = a$$

$$x = \frac{a}{y} \qquad f^{-1}(y) = \frac{a}{y}$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{a}{\frac{a}{x}} = x$$