Diferenciální rovnice

neznámá je funkce. Objevují se ve fyzici i chemii.
Objevují v nich derivace – proto diferenciální.

Příklad y je funkce proměnné x.

$$y' = y \qquad y'(x) = y(x)$$

$y(x) = c\,e^x$ je řešení pro každou konstantu c

$$(c\,e^x)' = c \cdot (e^x)' = c \cdot e^x$$

Často přidáváme počáteční podmínku

$$y(0) = 3$$

$$y(x) = c e^x$$

$$3 = y(0) = c \cdot e^0 = c \implies c = 3$$

Řešení dif. rovnice $y' = y$ s poč. podmínkou $y(0)=3$ je určeno jednoznačně, a je

$$y(x) = 3e^x.$$

Další příklad: $y'' + y = 0$

y'' je druhá derivace $y'' = (y')'$

Zde jsou řešením všechny funkce tvaru

$$y(x) = a\cos x + b\sin x$$

$$y'(x) = -a\sin x + b\cos x \quad , \quad y''(x) = -a\cos x - b\sin x$$

$$y''(x) + y(x) = (-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0.$$

Počáteční podmínka : $y(0) = 3 \quad y'(0) = 4$

$$3 = y(0) = a \cos 0 + b \sin 0 = a \qquad a = 3$$

$$4 = y'(0) = -a \sin 0 + b \cos 0 = b \qquad b = 4$$

$\underline{y(x) = 3 \cos x + 4 \sin x}$ je řešení.

Obecný tvar dif. rovnice 1. řádu je

$$y' = f(x, y)$$

Počáteční podmínka je

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0, y_0 \text{ pevná čísla}$$

1) Nechť funkce f závisí pouze na x

$$y' = f(x)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$y(x)$ musí být primitivní funkce k funkci $f(x)$

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

Nechť $F(x)$ je jedna z nich, pak všechny ostatní jsou

$$y(x) = F(x) + C$$

$$y_0 = y(x_0) = F(x_0) + C \implies C = y_0 - F(x_0)$$

Řešení

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0 \qquad \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

2. Další možnost je, že $f(x,y) = g(y)$

Rovnice

$$y' = g(y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Řešení: Předpokládejme, že $g(y) \neq 0$.

Dostaneme:

$$\frac{y'}{g(y)} = 1 \Rightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = 1$$

Tuto rovnost integrujeme podle x

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int 1\,dx$$

$\Longrightarrow$ vezmeme substituci $\quad \underbrace{y = y(x)} \quad \underbrace{dy = y'(x)\cdot dx} \iff \frac{dy}{dx} = y'(x)$

dosadíme do integrálu vlevo

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int 1\,dx$$

Nechť prim. funkce ke $\frac{1}{g(y)}$ je $G(y)$.

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int 1\, dx = x + c$$ c je konstanta

$$G(y) = x + c \qquad \Big/\ G^{-1} \circ \ldots$$

Nechť G^{-1} je inverzní funkce ke G.

$$G^{-1} \circ G(y) = G^{-1}(x+c)$$

$$y = G^{-1}(x+c)$$

$$y(x) = G^{-1}(x+c)$$ je řešení

$$y_0 = y(x_0) = G^{-1}(x_0 + c)$$

Odtud spočítáme konstantu c:

$$y_0 = G^{-1}(x_0 + c) \qquad / G$$

$$G(y_0) = x_0 + c$$

$$c = G(y_0) - x_0$$

Řešení úlohy $y' = g(y)$

je funkce $y(x) = G^{-1}(x + G(y_0) - x_0)$

Malá poznámka: $y' = g(y)$

Nechť pro nějaké y_0 je $g(y_0) = 0$.

Potom konstantní funkce

$$y(x) = y_0$$

je řešením rovnice

$$y' = g(y)$$ s poč. podmínkou $y(x_0) = y_0$

$$(y_0)' = 0 = g(y_0)$$

Příklad

$$y' = k y \quad \text{, kde } k \text{ je konstanta}$$

$$y(0) = 3$$

Předchozí postup dává

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = k \qquad \text{integrujeme podle } x$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int k\,dx$$

Substituce $y = y(x)$ $\quad dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$

$$\ln|y| + c_1 = kx + c_2$$

$$\ln|y| = kx + \underbrace{c_2 - c_1}_{c} = kx + c \quad \Big/ \exp$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kx+c} = \underbrace{e^{c}}\cdot e^{kx} = L\,e^{kx}$$

$$|y(x)| = L\,e^{kx}$$ L nějaká konstanta

$$|y(x)| = L e^{kx}$$

$y(0)=3>0$ $\quad |y(0)| = |3| = 3 = L e^{k0} = L$

V našem případě je $L=3$

$$|y(x)| = 3 \cdot e^{kx} > 0$$

$y(0)>0$ a $y(x)\neq 0$. Z toho plyne, že $y(x)>0$ pro všechna x.

$$y(x) = |y(x)| = 3e^{kx}$$

Toto je hledané řešení. $y' = \left(3e^{kx}\right)' = 3e^{kx} \cdot k = k \cdot 3e^{kx} = k\,y(x)$

$y(0) = 3e^{k0} = 3$.

Stejná rovnice $\qquad y' = k y$

počáteční podmínka $\qquad y(0) = -5$

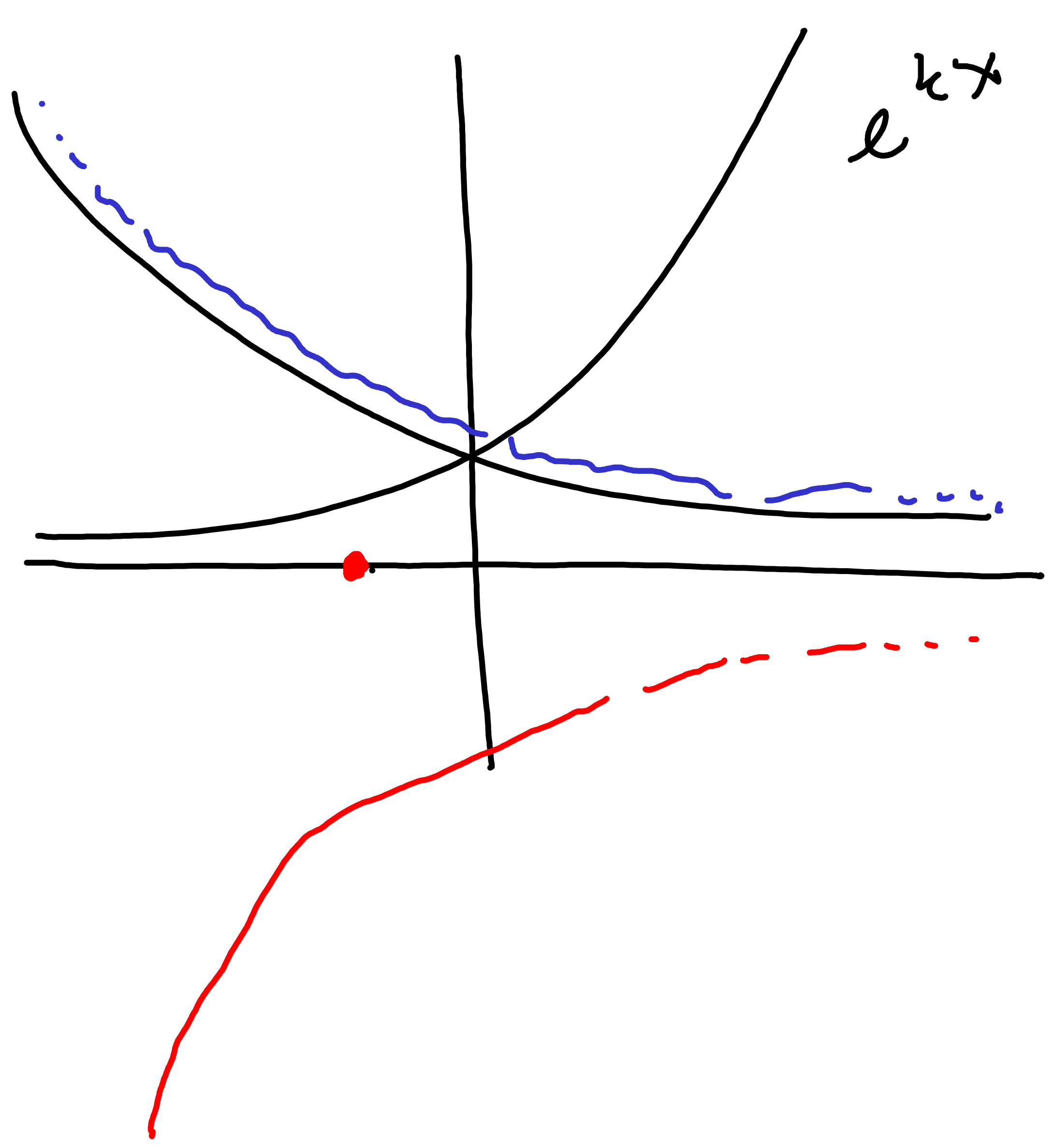
$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)} = \int k\,dx$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)} = \int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$

$$\ln|y(x)| = kx + c \quad / \exp$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{kx+c}$$

$$|y(x)| = e^c e^{kx} = L e^{kx} > 0$$



$$y(0) = -5$$

$$|y(0)| = |-5| = L e^{k0} = L$$

$$L = 5 \qquad y(0) = -5 < 0$$

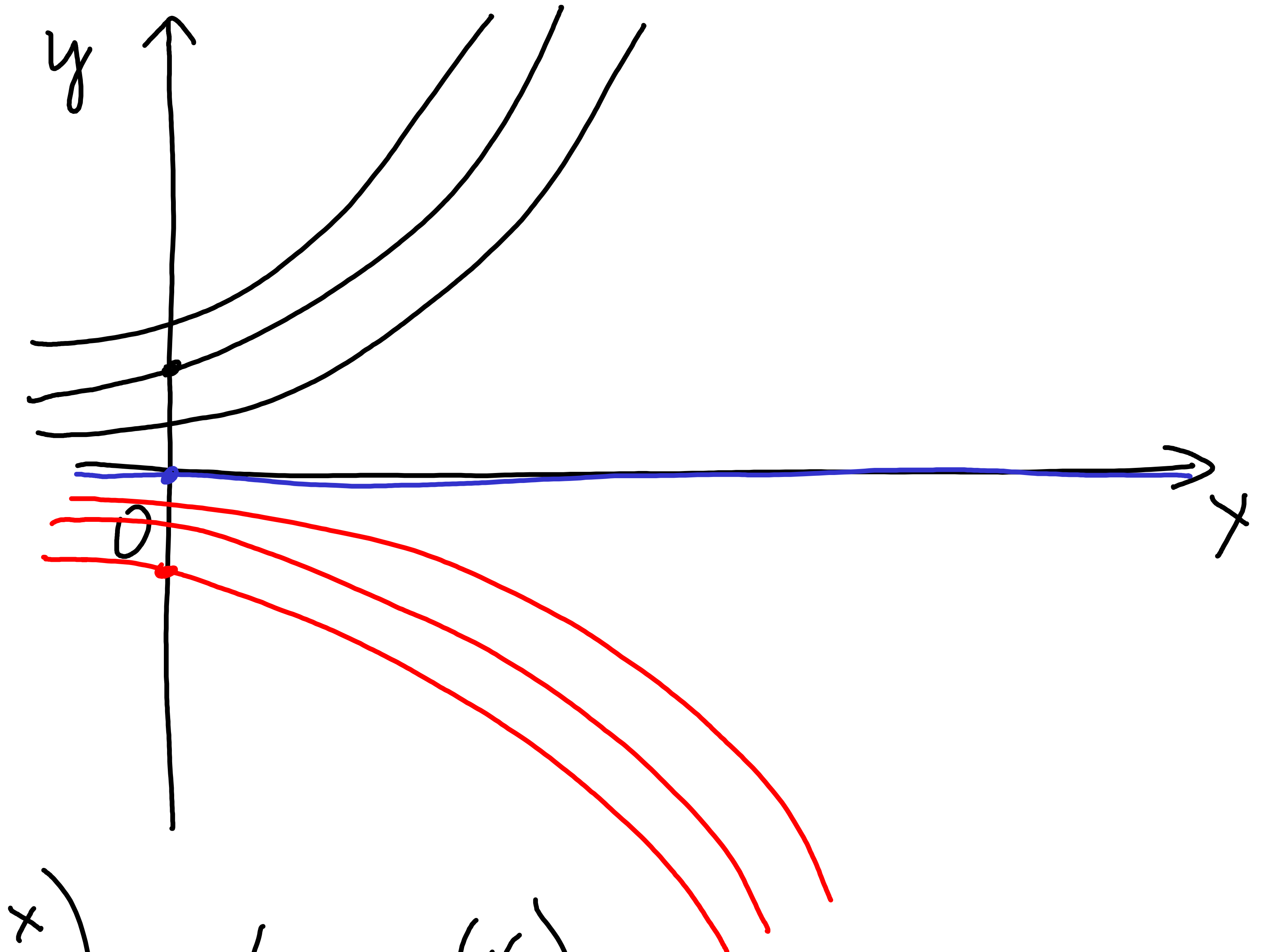
$$|y(x)| = 5e^{kx} > 0$$

y nemůže být rovna 0

Kdyby $y(x)=0$, pak $|0| = 5e^{kx} > 0$, spor.

Proto $y(x) < 0$ pro všechna x.

$$y(x) = -|y(x)| = -5 \cdot e^{kx}$$



Řešení je $y(x) = -5e^{kx}$

$$y'(x) = \left(-5e^{kx}\right)' = (-5)\, e^{kx} \cdot k = k \cdot \left(-5e^{kx}\right) = k \cdot y(x)$$

$$y(0) = -5 \cdot e^{k \cdot 0} = -5$$

$y(0) = 0$ řešení

$y(x) = 0 \cdot e^{kx} = 0$

(1) $\quad y' = f(x)$

(2) $\quad y' = g(y)$

Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Postup řešení: Předpokládejme, že $g(y) \neq 0$.

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Tuto rovnici integrujeme

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx$$

Substituce $y = y(x)$ $\quad dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$F(x)$ primitivní k $f(x)$

$G(y)$ primitivní k $\frac{1}{g(y)}$

$$G(y) = F(x) + C$$

Nechť G^{-1} je inverzní ke G:

$$G(y) = F(x) + c \quad / \; G^{-1} \circ$$

$$G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + c)$$

$$y = G^{-1}(F(x) + c)$$

Poč. podmínka: $y(x_0) = y_0$

$$y_0 = y(x_0) = G^{-1}(F(x_0) + c)$$

$$y_0 = G^{-1}(F(x_0) + c) \quad / \; G \circ$$

$$G(y_0) = F(x_0) + c \qquad \boxed{c = G(y_0) - F(x_0)}$$

Příklad:

$$y' = \frac{1}{x}(4y-1) \qquad y(1) = 3$$

$$\frac{y'}{4y-1} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{4y(x)-1} = \int \frac{dx}{x}$$

Substituce $y = y(x)$

$$\int \frac{dy}{4y-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$z = 4y-1$

$dz = 4dy$

$$\int \frac{dy}{4y-1} = \int \frac{dx}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad x > 0$$

$$\frac{1}{4} \ln|4y-1| = \ln|x|$$

$$\ln|4y-1| = 4\ln|x| + c$$

$$\ln|4y-1| = 4\ln x + c \qquad \Big/ \exp$$

$$e^{\ln|4y-1|} = e^{4\ln x + c}$$

$$|4y-1| = e^c e^{4\ln x} = e^c \cdot \left(e^{\ln x}\right)^4 = e^c x^4 = L x^4 > 0 \text{ na } x > 0$$

$y(1) = 3$

$$11 = |4\cdot 3 - 1| = L \cdot 1^4 \Rightarrow L = 11$$

Proto $4y(x) - 1$ musí být > 0 na nějaké $x > 0$.

$$4y-1 = |4y-1| = 11\,x^4$$

$$4\,y(x)-1 = 11x^4$$

$$4\,y(x) = 11x^4+1$$

$$y(x) = \frac{1}{4}(11x^4+1) \quad \text{řešení}$$

DÚ: Řešte s počáteční podmínkou $y(1)=-5$

<u>Zkouška:</u>

$$L = y'(x) = \frac{1}{4}(11\cdot 4\cdot x^3) = 11x^3$$

$$P = \frac{1}{x}(4y(x)-1) = \frac{1}{x}\left(4\cdot\frac{1}{4}(11x^4+1-1)\right) = \frac{1}{x}\,4\cdot\frac{1}{4}(11x^4) = 11x^3$$

$$L = P \qquad y(1) = \frac{1}{4}(11\cdot 1^4+1) = \frac{1}{4}\cdot 12 = 3$$

Příklad:

$$(x+1)\,y' = xy \qquad y(0) = -2$$

Pro $x=-1$ dostaneme

$$0 = (-1+1)\,y' = -1\cdot y$$

$$\Rightarrow y(-1) = 0$$

Funkce $y(x)=0$ je řešení, ale s poč. podmínkou $y(0)=0$.

$$y' = \frac{x}{x+1}\cdot y = f(x)\cdot g(y)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x+1} \qquad x \neq -1$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)} = \int \frac{x}{x+1}\,dx$$

Substituce $y = y(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$\ln|y(x)| = \int \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\ln|y(x)| = x - \ln|1+x| + C \qquad / \exp$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{x-\ln|1+x|+C} = \left(e^{C}\cdot e^{x}\right) : e^{\ln|1+x|}$$

$$|y(x)| = L\,\frac{e^{x}}{|1+x|} \qquad y(0)=-2$$

Počítejme na intervalu $x \in (-1,\infty)$. Proto $1+x = |1+x|$

$$|y(x)| = L\frac{e^x}{1+x} > 0$$

$y(0) = -2$

$$2 = |-2| = |y(0)| = L\frac{e^0}{1} = L \implies L = 2$$

Platí $L = 2$ $\quad y(0) < 0$ a $y(x) \neq 0$ pro $x \in (-1, \infty)$

Platí $y(x) < 0$ pro všechna $x \in (-1, \infty)$.

$$y(x) = -|y(x)| = -2\frac{e^x}{1+x}$$

Řešení je

$$y(x) = -2\frac{e^x}{1+x}$$

$$y(x) = -2\frac{e^x}{1+x}$$

$$L = (1+x)\,y'(x) = (1+x)(-2)\frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{(-2)e^x\,(1+x)\,(1+x-1)}{(1+x)^2} = (-2)\frac{x}{1+x}\,e^x$$

$$P = x\,y(x) = x\cdot(-2)\frac{e^x}{1+x} = L$$

$$y(0) = (-2)\frac{e^0}{1} = \underline{\underline{-2}}$$