DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$y(x)$ je neznámá funkce

rovnice se separovanými proměnnými

<u>Př 1</u> $\quad y' = x y^2 \quad y(0) = 3$

$$y' = x y^2 \quad \Big/ : y^2$$

$y(x) \equiv 0$ je řešení dif. rovnice

$y(0) = 0$

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x$$

integrujeme

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)} = \int x\,dx$$

Na levé straně uděláme substituci

$y = y(x)$

$dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2+d}{2}$$

$$-y = \frac{2}{x^2+d}$$

$$y = -\frac{2}{x^2+d} \qquad x=0 \qquad y(0)=3$$

$$3 = y(0) = -\frac{2}{0^2+d} \implies d = -\frac{2}{3}$$

Řešení počáteční úlohy je

$$y(x) = \frac{-2}{x^2-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}-x^2} = \frac{6}{2-3x^2}$$

Zkouška:

$$\left(\frac{6}{2-3x^2}\right)' = \frac{-6(-6)x}{(2-3x^2)^2} = \frac{+36x}{(2-3x^2)^2} = L$$

$$P = xy^2 = x\cdot\left[\frac{6}{(2-3x^2)}\right]^2 = \frac{36x}{(2-3x^2)^2} = L$$

Př 2

$y' = x^2 y \qquad y(0) = -3 \qquad y(x) \equiv 0$ je řešení s poč. podmínkou $y(0) = 0$

$$y' = x^2 y \qquad \Big| : y$$

$$\frac{y'}{y} = x^2 \qquad \int \ldots dx$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)} = \int x^2\,dx \qquad \underline{y = y(x)} \quad \underline{dy = y'(x)\,dx}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + c \qquad \Big/ \, e^{\ldots}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^3}{3}+c} = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot \underbrace{e^c}_{A>0}$$

$$|y| = A \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$y(0) = -3$$

$$3 = |-3| = |y(0)| = A \cdot e^0 = A$$

$$|y| = 3 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$y(x) = -|y(x)| = -3e^{\frac{x^3}{3}}$$

Řešení počáteční úlohy je $y(x) = -3e^{\frac{x^3}{3}}$

Zk:

$$y'(x) = \left(-3e^{\frac{x^3}{3}}\right)' = -3e^{\frac{x^3}{3}} \cdot x^2$$

$$= y \cdot x^2$$

$$y(0) = -3e^0 = -3$$

Př 3 Poločas rozpadu

Radioaktivní nuklid se rozpadá podle dif. rovnice

$$N' = -\lambda N \qquad \lambda > 0$$

N' je záporné, proto funkce $N(t)$ klesá.

Víme, že poločas rozpadu je 5568 let. Za jak dlouho se rozpadne 25 % radioaktivního nuklidu.

Řešení: $N' = -\lambda N$, $N(0) = N_0$

Řešení je $\frac{N'}{N} = -\lambda \Rightarrow \int \frac{N'(t)}{N(t)}\,dt = \int -\lambda\,dt$

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda t + c \qquad N > 0$$

$$\ln|N| = \ln N = -\lambda t + c \quad \Big/ e^{-}$$

protože $N > 0$

$$\underline{\underline{N}} = e^{\ln N} = e^{-\lambda t + c} = e^{-\lambda t} \cdot e^{c} = \underline{\underline{A \cdot e^{-\lambda t}}}$$

$$N_0 = N(0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = A$$

Řešení je $\quad N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$

$t = 5568 \quad \frac{N_0}{2} = N(5568) = N_0 e^{-\lambda \cdot 5568}$

Chceme spočítať λ: Preto aplikujeme ln

$$\ln \frac{N_0}{2} = \ln\left(N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5568}\right) = \ln N_0 + \ln e^{(-\lambda)\cdot 5568}$$

$$\cancel{\ln N_0} - \ln 2 = \cancel{\ln N_0} - \lambda \cdot 5568$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5568}$$

t_1 = čas rozpadu 25% vzorku:

$$\frac{3}{4} N_0 = N(t_1) = N_0 \, e^{-\overset{\lambda}{\frac{\ln 2}{5568}} t_1}$$

$$\frac{3}{4} = e^{-\frac{\ln 2}{5568} \cdot t_1} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln \frac{3}{4} = -\frac{\ln 2}{5568} \cdot t_1$$

$$\ln \frac{4}{3} = \frac{\ln 2}{5568} \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 2} \cdot 5568 \doteq 2310$$

Př 4 Chemická reakce $A + B \to C$. Koncentrace $z(t)$ látky C v čase se postupně mění podle dif. rovnice

$$z' = k(z-a)^2 \qquad z(0) = 0$$

Řešení:

$$\frac{z'}{(z-a)^2} = k \qquad \int dt$$

$$\int \frac{z'(t)}{(z-a)^2}\,dt = \int k\,dt \qquad \text{substituce } z = z(t)$$

$$\int \frac{dz}{(z-a)^2} = kt + c$$

$$-\frac{1}{z-a} = kt + C$$

$$-(z-a) = \frac{1}{kt+C}$$

$$a - z = \frac{1}{kt+C}$$

$$z = a - \frac{1}{kt+C} = \frac{akt + ac - 1}{kt+C}$$

$z(0) = 0$

$$0 = z(0) = \frac{ac-1}{c} \Rightarrow ac - 1 = 0 \qquad c = \frac{1}{a}$$

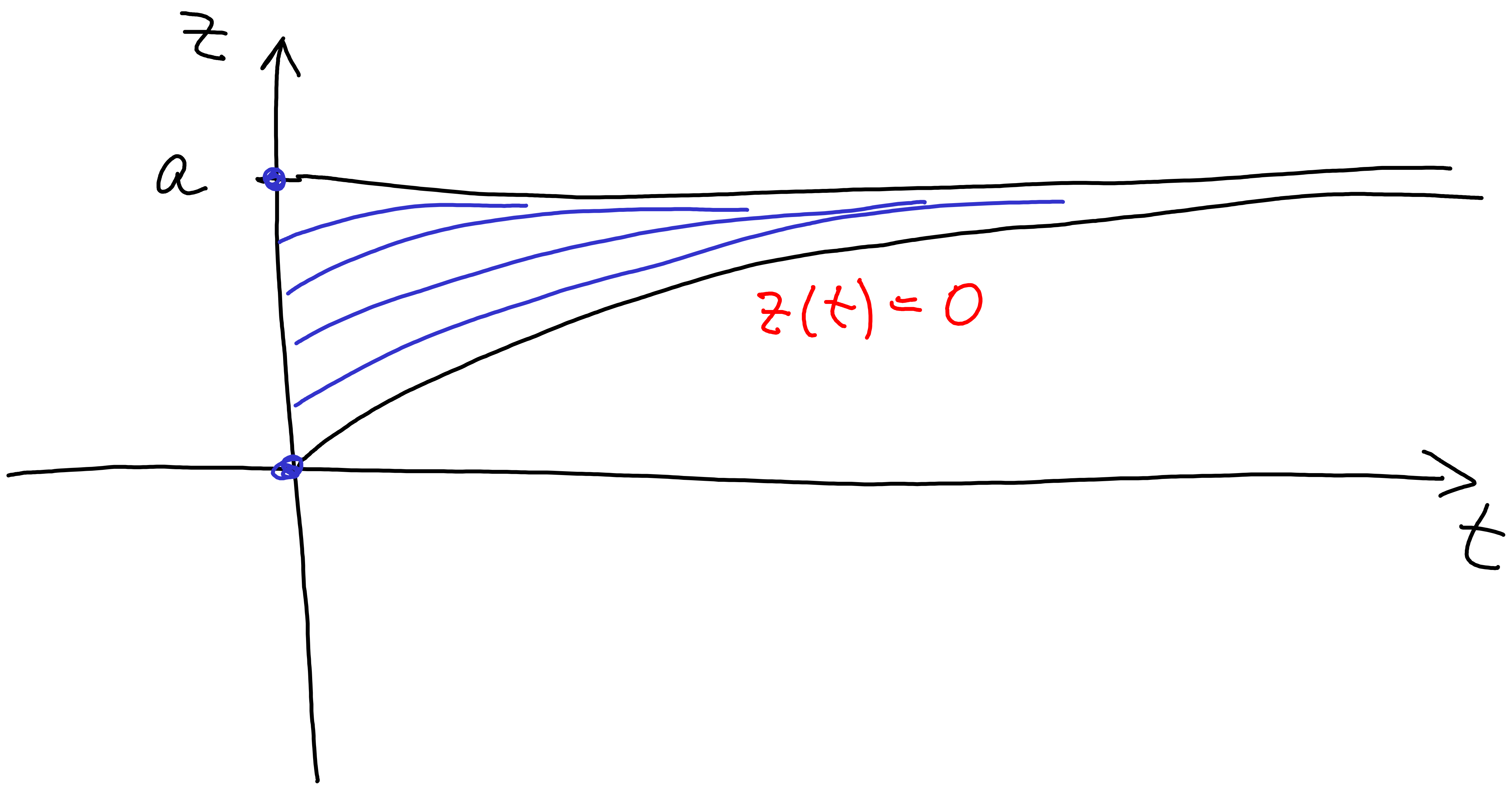
$$z(t) = \frac{akt + ac - 1}{kt + c} \underset{c=\frac{1}{a}}{=} \frac{akt}{kt + \frac{1}{a}} = \frac{a^2kt}{akt + 1}$$

Zase doporučuji provést zkoušku.

$$z' = k(z-a)^2$$

$z(t) \equiv a$ je řešení

Graf řešení

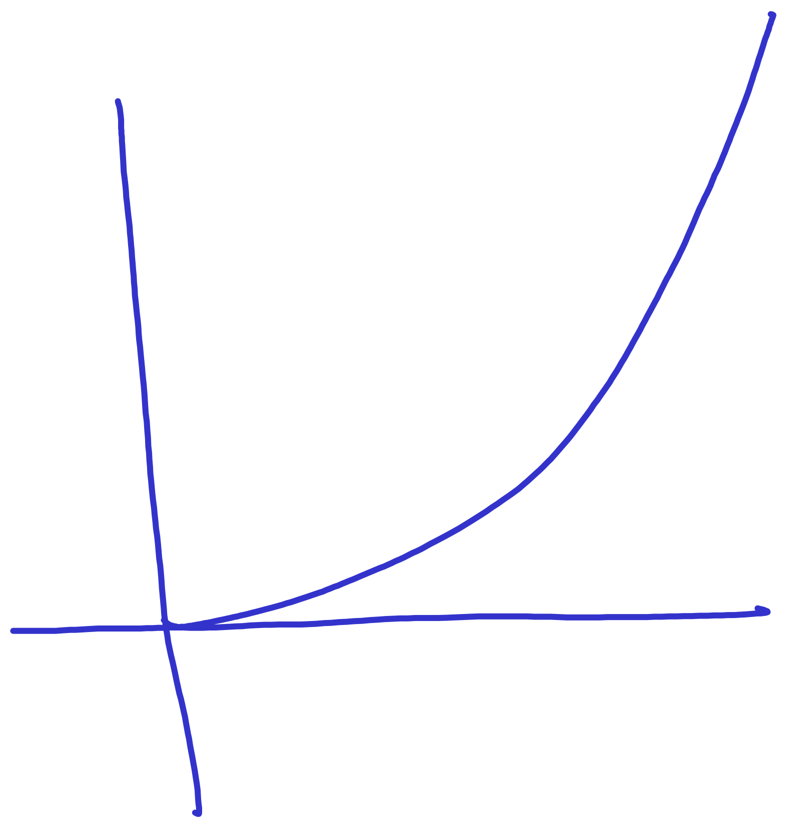


Př 5 Logistická dif. rovnice

Vývoj v čase populace P

Nejjednodušší model je $P' = \lambda P$ kde $\lambda > 0$

Řešení $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$



Lepší model poskytuje logistická dif. rovnice

$$P' = \lambda P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right) \qquad K > 0$$

Speciálně: $P(t) \equiv 0$ je řešení. $P(t) \equiv K$ je řešení

Bereme poč. podmínku $P(0) = P_0 \qquad 0 < P_0 < K$

$$P' = \lambda P\left(1 - \frac{P}{K}\right) = \lambda P\left(\frac{K-P}{K}\right) \quad \Big/ : P \cdot \frac{(K-P)}{K}$$

$$\frac{KP'}{P(K-P)} = \lambda \qquad \int - dt$$

$$\int \frac{K P'(t)\, dt}{P(t)(K-P(t))} = \int \lambda \qquad P = P(t) \quad dP = P'(t)\,dt$$

$$\int \frac{K\,dP}{P(K-P)} = \lambda t + c$$

Rozklad na parc. zlomky $\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$ $\quad 0 < P_0 < K$

$0 < P < K$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = \lambda t + c$$

$$\ln P - \ln(K-P) = \lambda t + c$$

$$\ln \frac{P}{K-P} = \lambda t + c \quad \Big/ \exp$$

$$\exp^{\ln \frac{P}{K-P}} = \underline{\underline{\frac{P}{K-P}}} = e^{\lambda t + c} = e^{\lambda t} \cdot e^{c} = \underline{\underline{L e^{\lambda t}}}$$

Spočítáme P

$$\frac{P}{K-P} = L e^{\lambda t}$$

$$P = K L e^{\lambda t} - P L e^{\lambda t}$$

$$P + P L e^{\lambda t} = K L e^{\lambda t}$$

$$P(t) = \frac{K L e^{\lambda t}}{1 + L e^{\lambda t}} \qquad P(0) = P_0$$

$t = 0$, $P(0) = P_0$

$$P_0 = \frac{KL}{1+L} \Rightarrow P_0 + L P_0 = KL$$

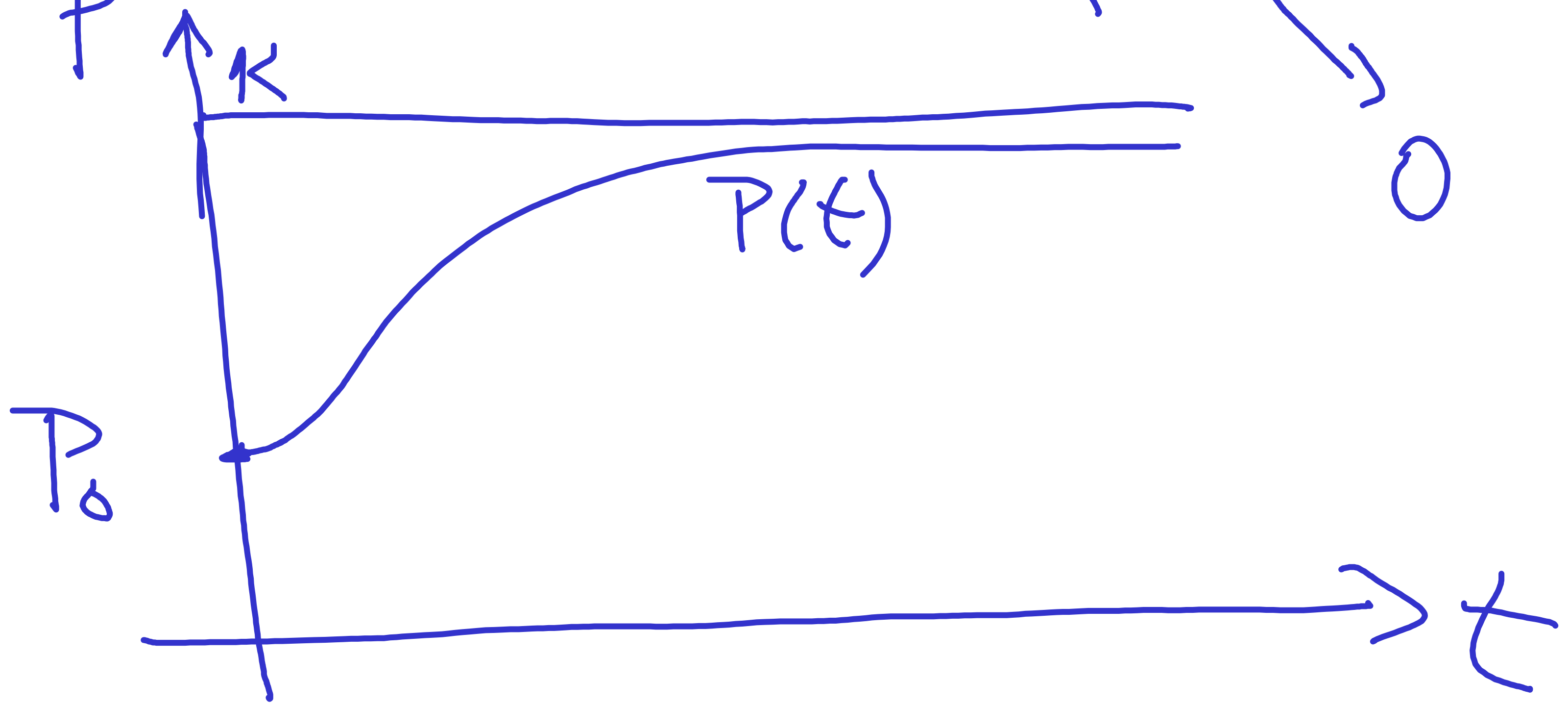
$$P_0 = (K - P_0) L$$

$$L = \frac{P_0}{K - P_0}$$

Řešení je
$$P(t) = \frac{\frac{K P_0}{K-P_0} \cdot e^{\lambda t}}{1 + e^{\lambda t}\frac{P_0}{K-P_0}} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\lambda t}\,\frac{K P_0}{K-P_0}}{e^{\lambda t}\left(\underbrace{\frac{1}{e^{\lambda t}}}_{\to 0} + \frac{P_0}{K-P_0}\right)} = \frac{\frac{K P_0}{K-P_0}}{\frac{P_0}{K-P_0}} = K$$

Graf řešení P



$(-1)\,dP = dy$

$K - P = y$

$$\int \frac{dP}{K-P} = \int \frac{-dy}{y} = -\int \frac{dy}{y}$$

Proč $-\ln(K-P)$?

Př 6

$$xy' = y^2 - y \qquad y(1) = -2$$

$y^2 - y = y(y-1)$

$y(x) \equiv 0$ je řešení

$y(x) \equiv 1$ je řešení

$$\frac{xy'}{y^2 - y} = 1 \qquad x \neq 0$$

$$\frac{y'}{y^2 - y} = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x) - y(x)} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$y = y(x) \quad dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \ln x + c$$

Rozklad na parc. zlomky

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \ln x + c$$

$y(1) = 2$

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln x + c$$

$$\ln \frac{|y-1|}{|y|} = \ln x + c$$

$$\ln \left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln x + c$$

nebo: $y(1) = -2$

$$\ln \frac{y-1}{y} = \ln x + c \quad / \exp$$

$$e^{\ln \frac{y-1}{y}} = e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^{c}$$

$$\frac{y-1}{y} = A \cdot x$$

$$y-1 = Axy$$

$$y - Axy = 1$$

$$y(x) = \frac{1}{1-Ax} \qquad y(1) = -2$$

$$-2 = y(1) = \frac{1}{1-A} \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

Řešení je $y(x) = \dfrac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \dfrac{2}{2-3x}$ Dobré udělat zkoušku!

Př 7

$$2(1+e^x)\,y\,y' = e^x \qquad y(0) = -2$$

$$2yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad \Big/ \int \text{—}\, dx$$

$$\int 2y\,y'(x)\,dx = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} \qquad \begin{aligned} 1+e^x &= t \\ dt &= e^x\,dx \end{aligned}$$

$$\int 2y\,dy = \int \frac{dt}{t}$$

$$y^2 = \ln t + c = \ln(1+e^x) + c$$

$$y^2(x) = \ln(1+e^x) + c \qquad \ln(1+e^x) + c > 0$$

1. varianta $\quad y(x) = +\sqrt{\ln(1+e^x)+c}$

Poč. podmínka

2. varianta $\quad y(x) = -\sqrt{\ln(1+e^x)+c}$ $\qquad y(0) = -2$

Pro počáteční podmínku přichází v úvahu pouze 2. varianta

$$y(x) = -\sqrt{\ln(1+e^x)+c}$$

$x=0,\ y(0)=-2$

$$-2 = -\sqrt{\ln(1+1)+c}$$

$$2^2 = \ln 2 + c \Rightarrow c = 4 - \ln 2$$

Řešení je

$$y(x) = -\sqrt{\ln(1+e^x) + 4 - \ln 2}$$
$$= -\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + 4}$$

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) + 4 > 0$$
$$\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) > -4$$
$$\frac{1+e^x}{2} > e^{-4}$$
$$e^x > \underbrace{2e^{-4} - 1}_{\text{je záporné,}}$$

platí pro všechna x