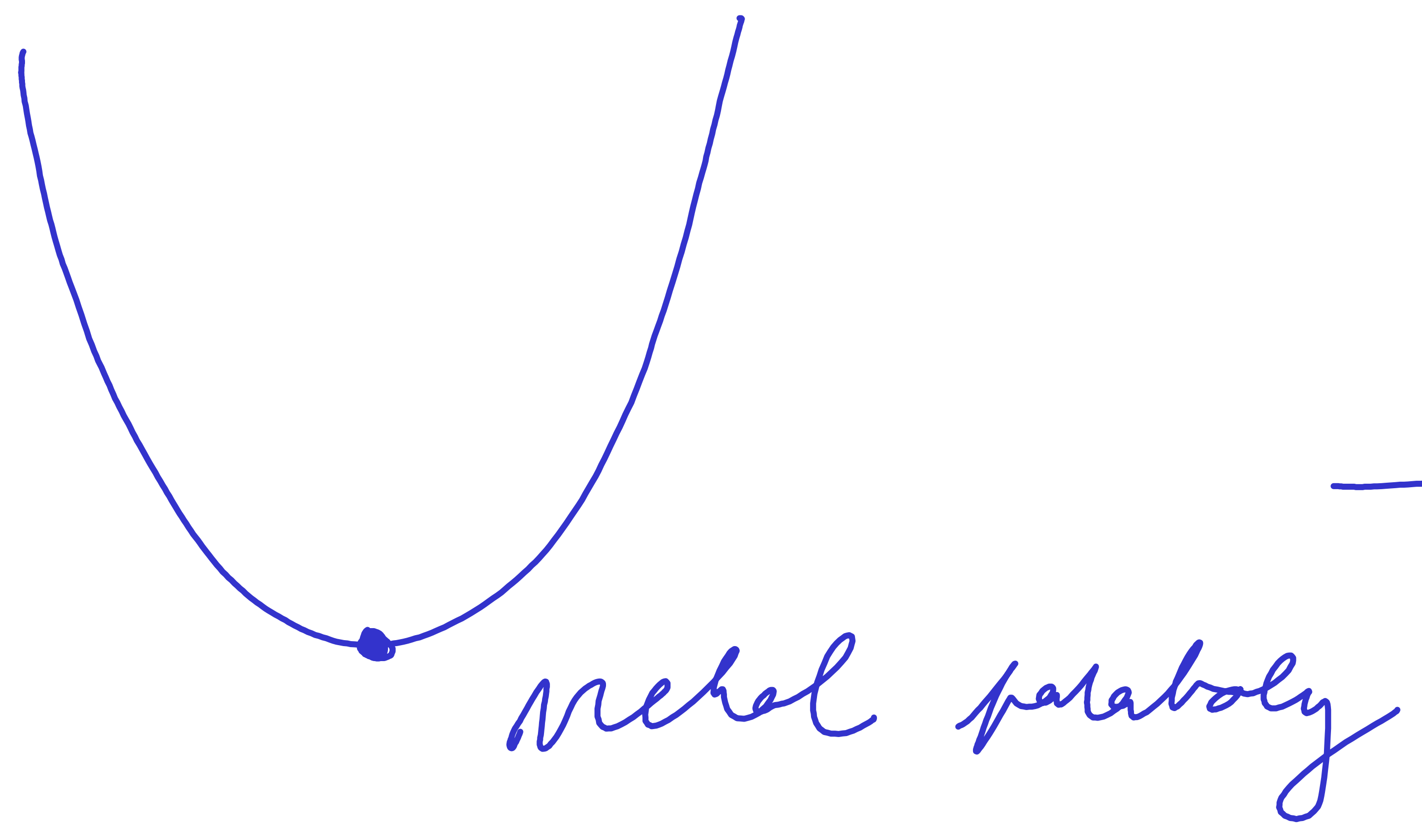
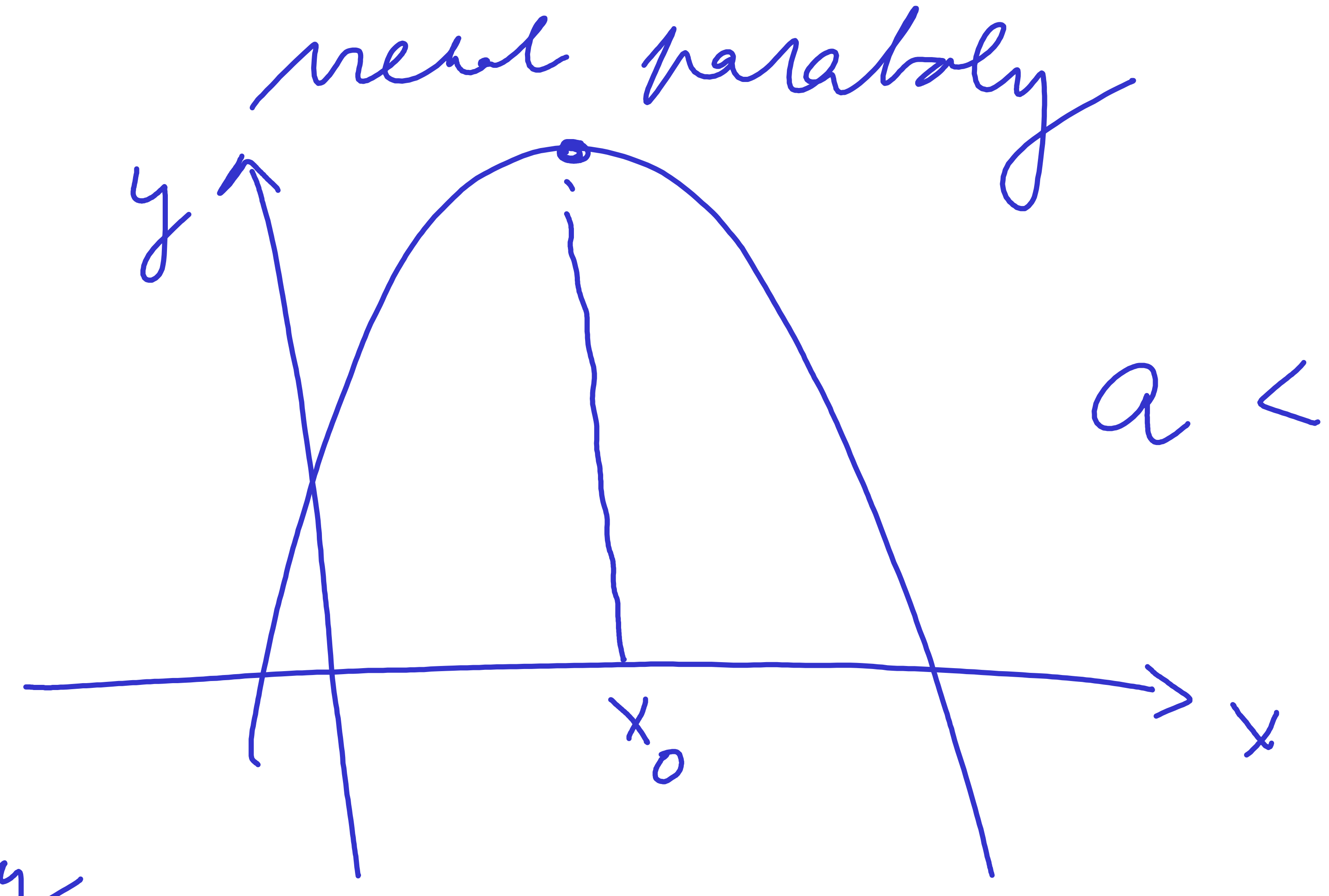
Kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Grafem je parabola

$a > 0$





$a < 0$

Spočítáme souradnice vrcholu paraboly

$$at^2+bt+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c$$

$c=x \quad d=\frac{b}{2a}$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$a>0$ minimum bude pro

$$x_0+\frac{b}{2a}=0$$

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

$a<0$

maximum

pro

$$x_0+\frac{b}{2a}=0$$

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

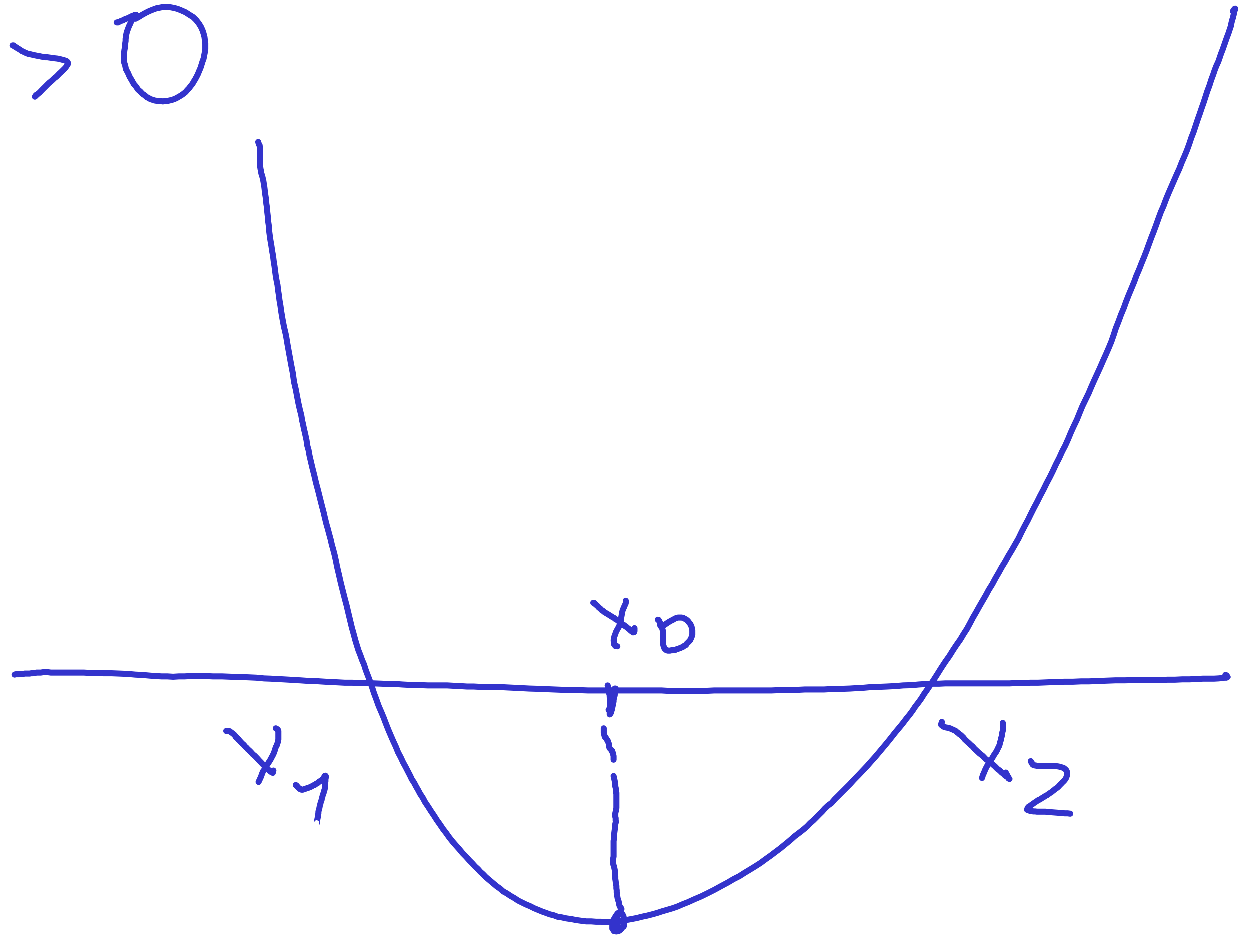
$$f(x_0)=a\underbrace{\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2}_{0}-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=c-\frac{b^2}{4a}$$

$$(c+d)^2=c^2+2cd+d^2$$

$$(c+d)(c+d)=c^2+cd+dc+d^2$$

$a > 0$



$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \qquad a \neq 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Rovnice má kořeny v reálných číslech, právě když $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0$$

$$y^2 = 9$$

$$|y| = 3$$

$$y = \pm 3$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

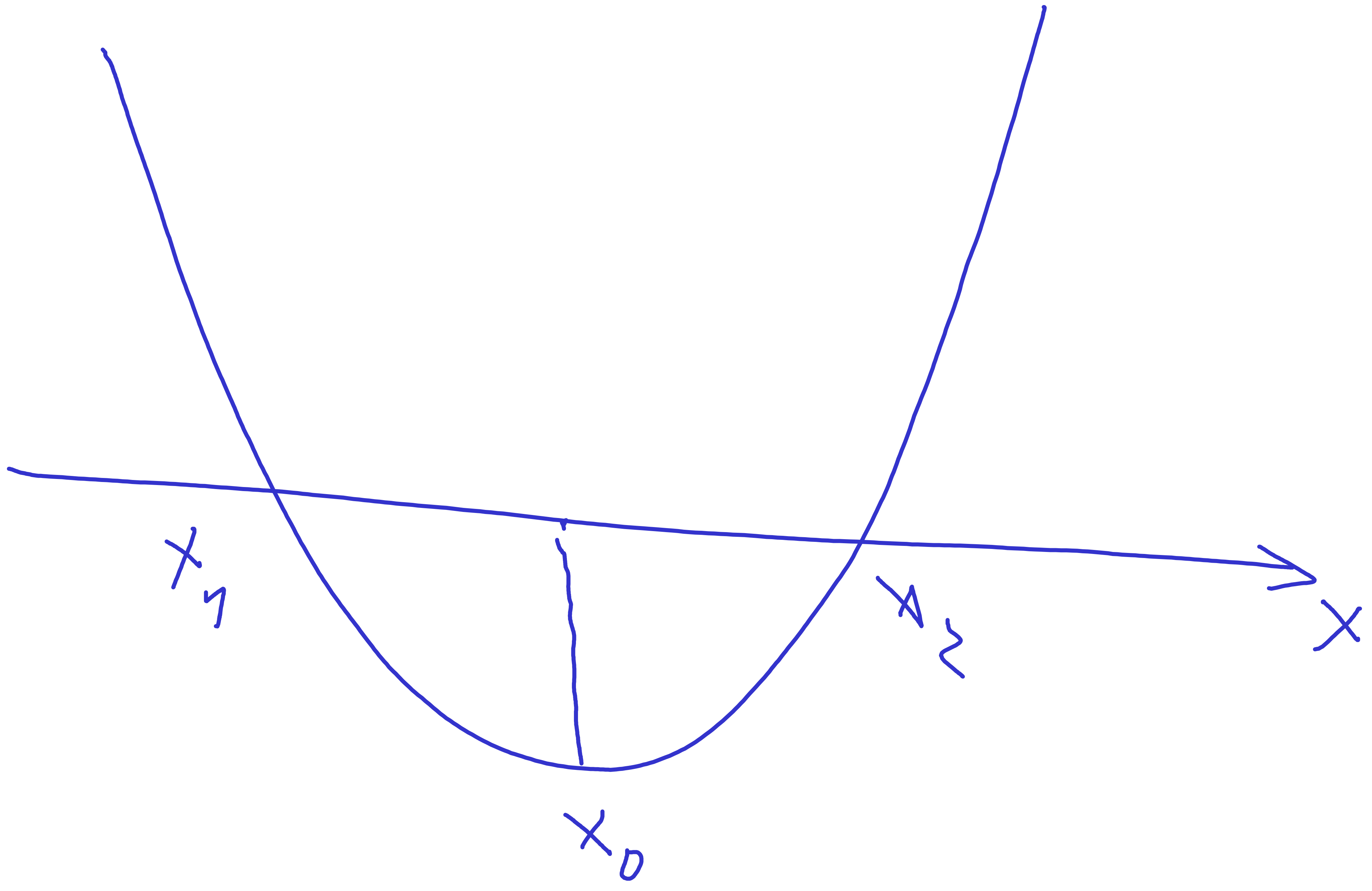
$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

$a>0$: $\quad \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a<0$: $\quad \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} = \dfrac{\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



Platí

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= ax^2 - ax\underbrace{(x_1+x_2)} + ax_1x_2$$

$$-a(x_1+x_2) = b$$

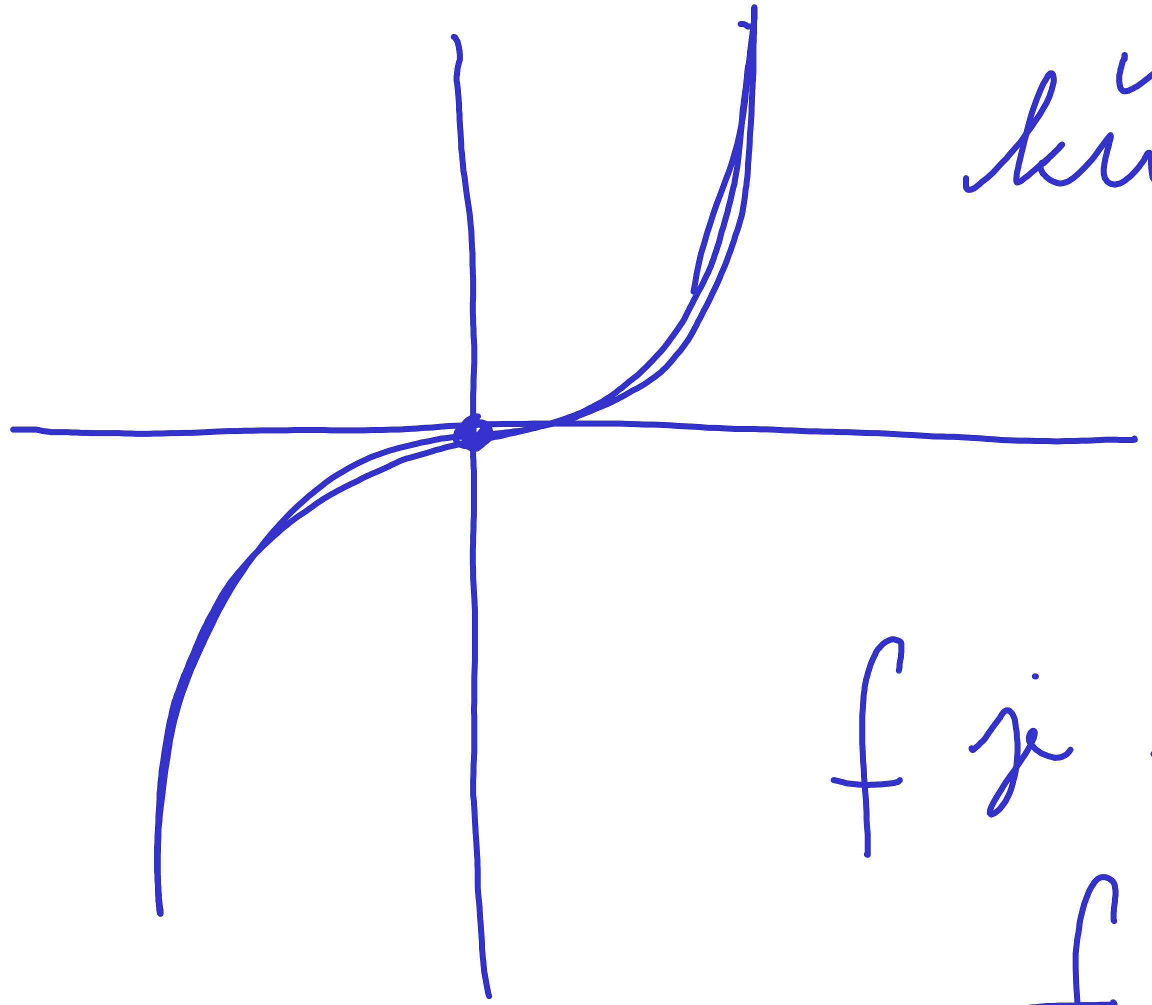
$$x_1+x_2 = -\frac{b}{2}$$

$$ax_1x_2 = c$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Mocninné funkce

$f(x) = x^3$

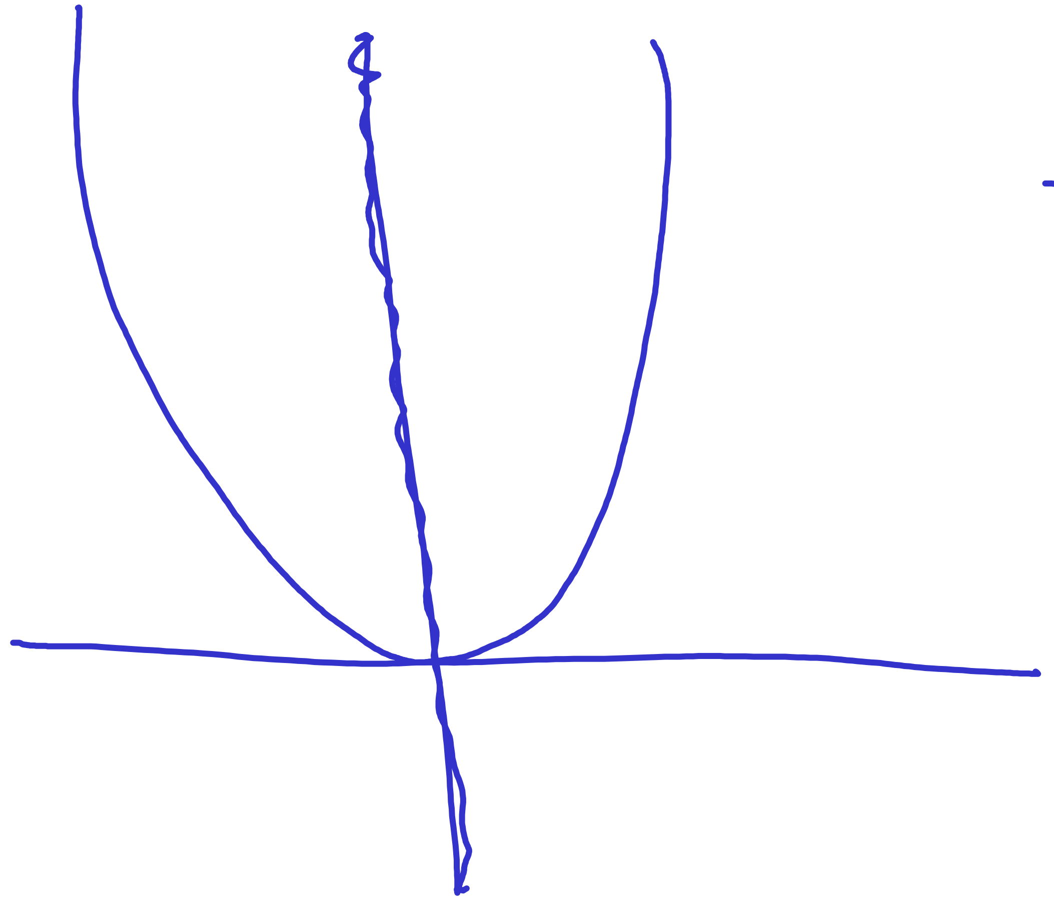


křivka se nazývá kubická parabola

f je lichá

$f(-x) = -x^3$

$f(x) = x^4$

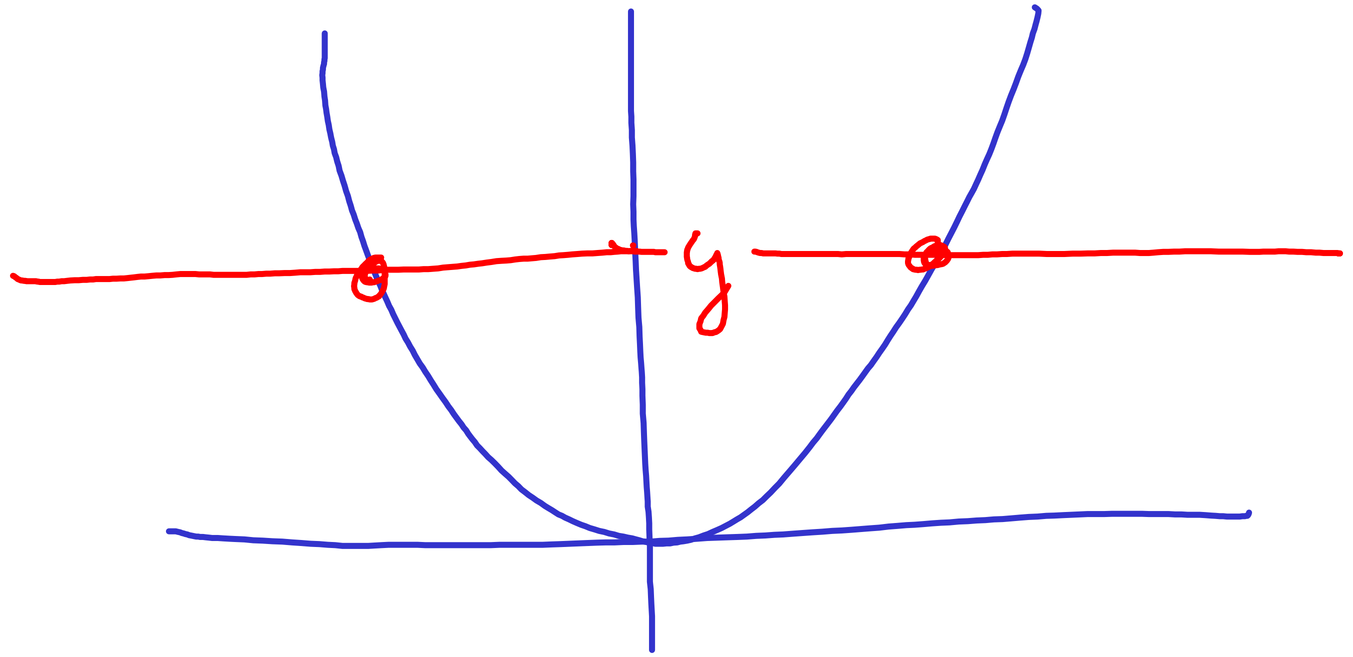


f je sudá

$f(-x) = f(x)$

$f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

n sudé

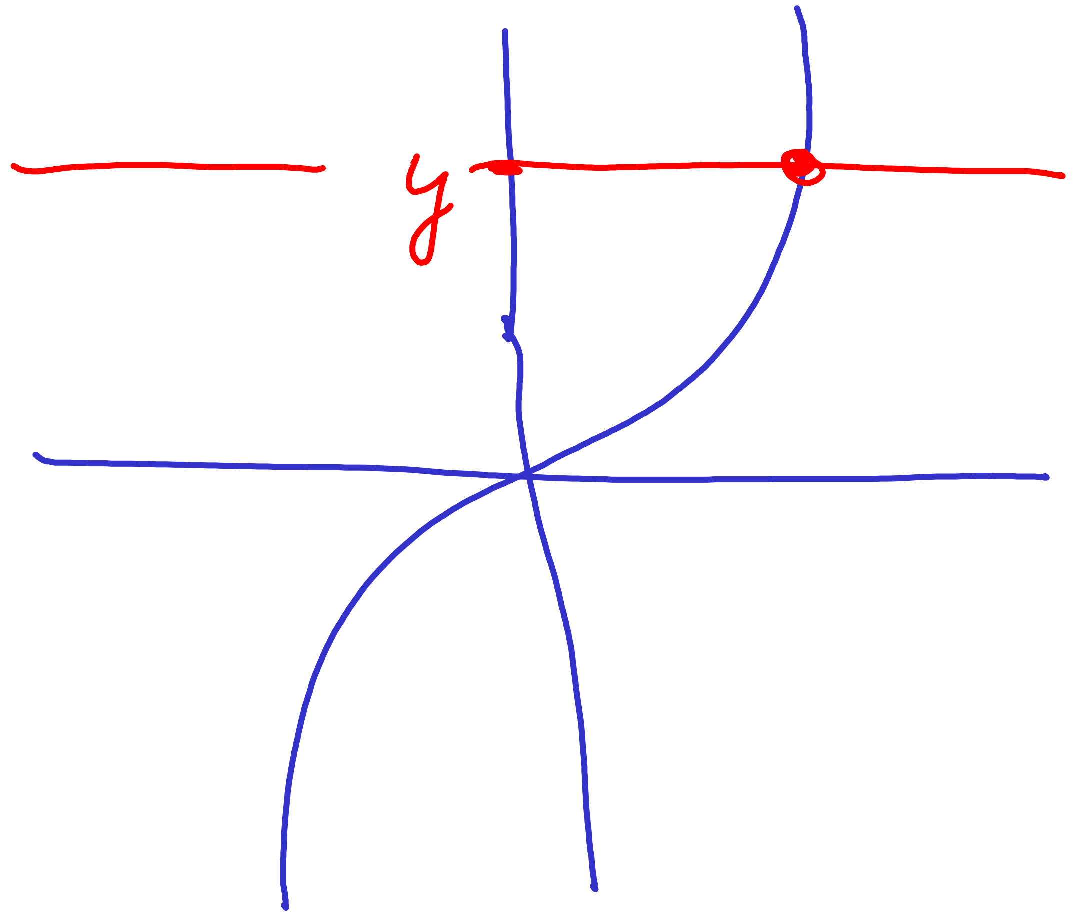


f je sudá funkce

$H(f) = \langle 0, \infty)$

f není prostá

n liché

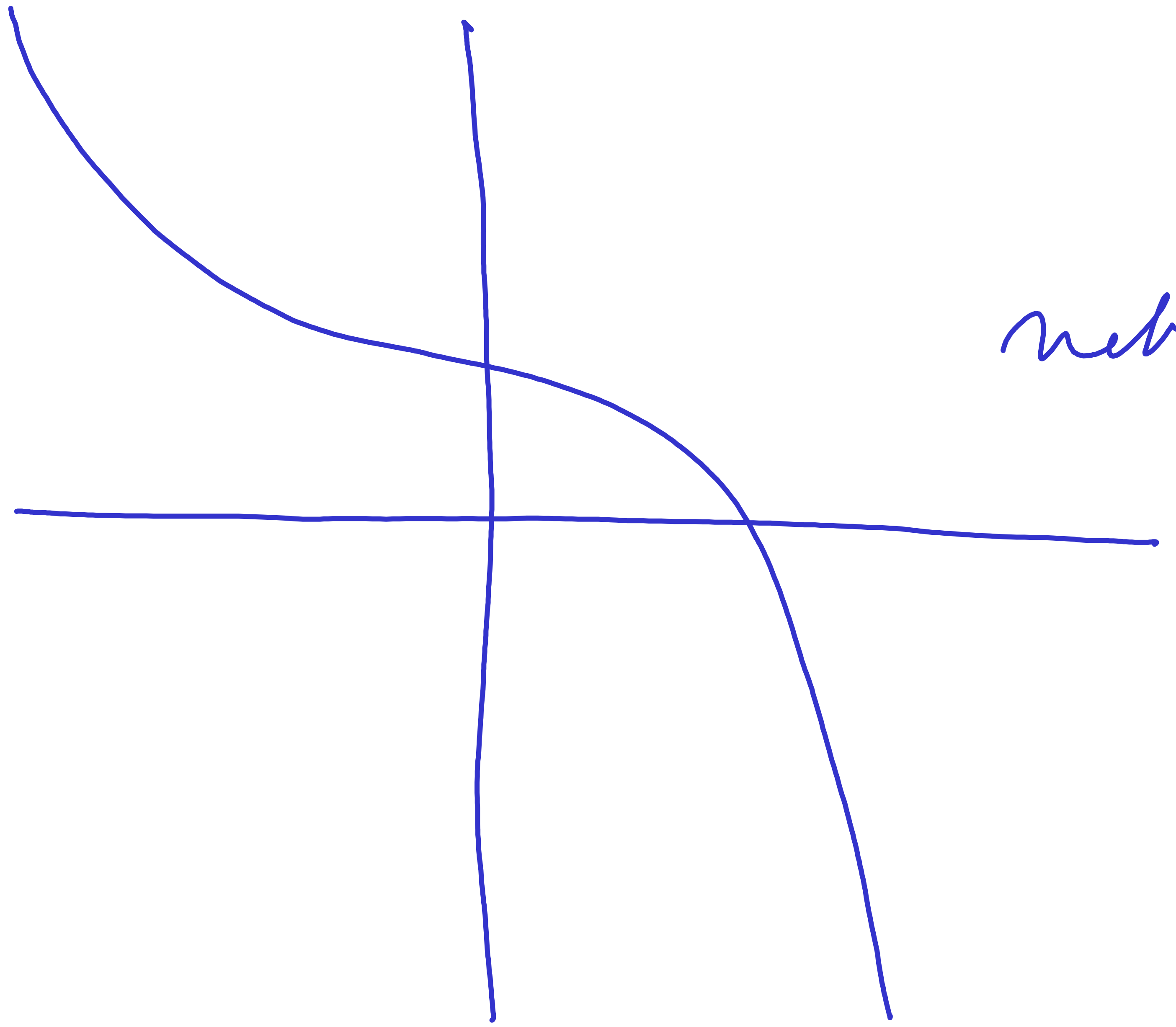


f je lichá funkce

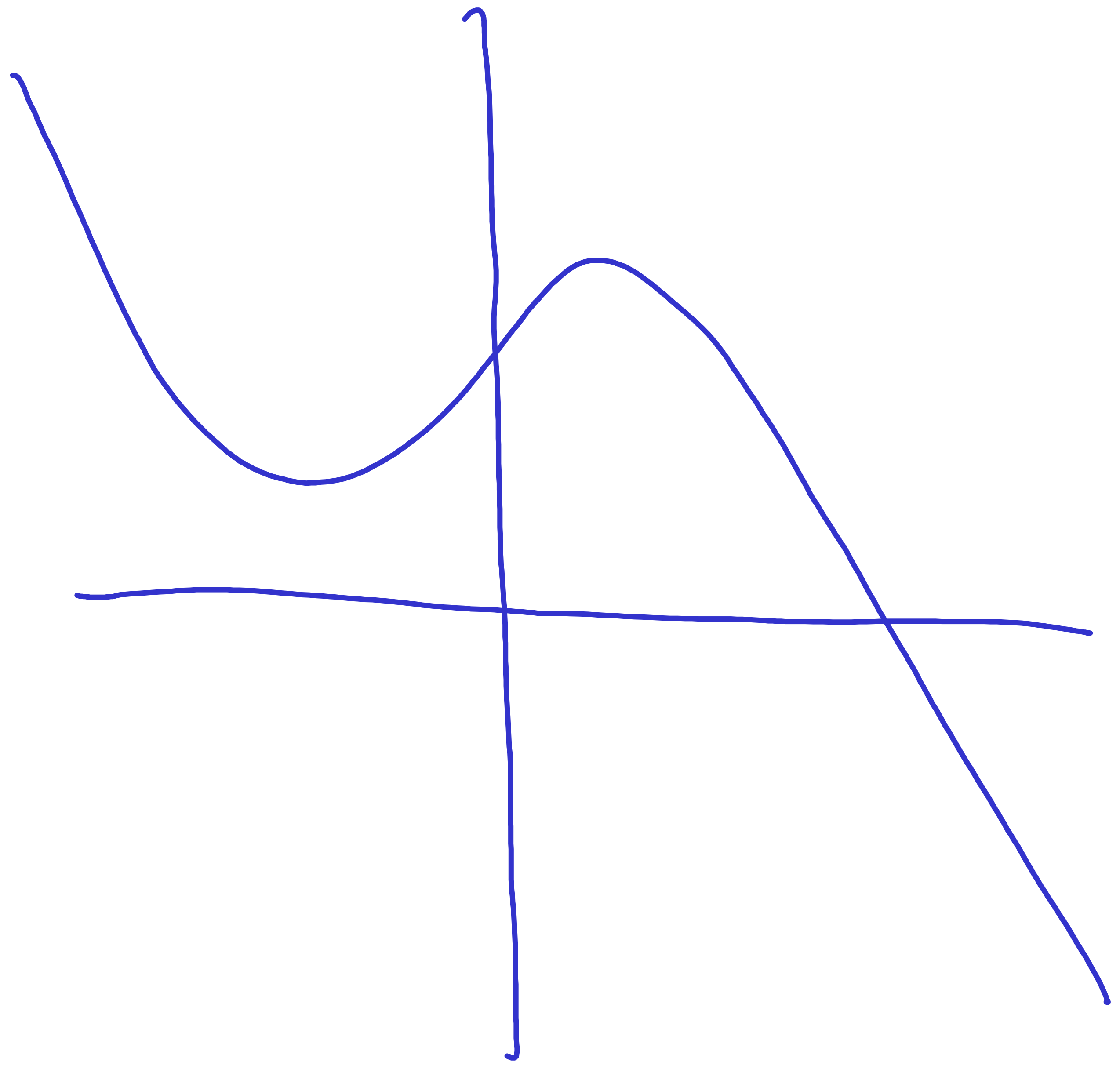
$H(f) = \mathbb{R}$

f je prostá funkce

$a_3 < 0$



nebo



Polynomy stupně n

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$a_n \neq 0$$

Kořen polynomu je číslo x_0 takové, že $f(x_0) = 0$.

Platí: x_0 je kořen polynomu f stupně n, právě když

$f(x) = (x - x_0)\, g(x)$, kde g je polynom stupně $n-1$.

Hledání kořenů

(1) Pro polynomy st ≥ 5 žádný vzorec pro kořeny neexistuje.

(2) Pro polynomy st $= 3$ a 4 vzorec existuje, ale nikdo ho nepoužívá, protože je nešikovný.

Jiné způsoby hledání kořenů

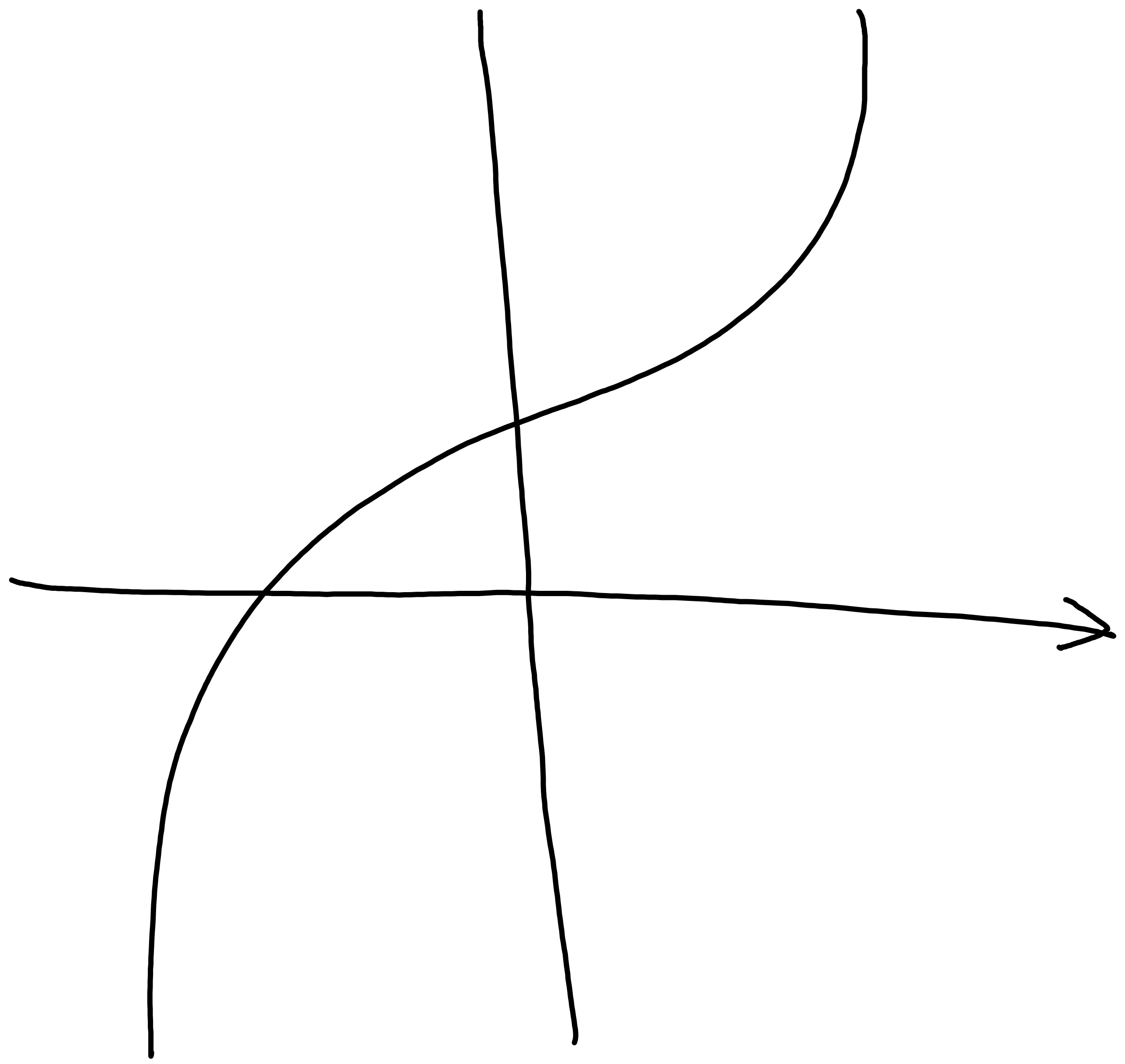
Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

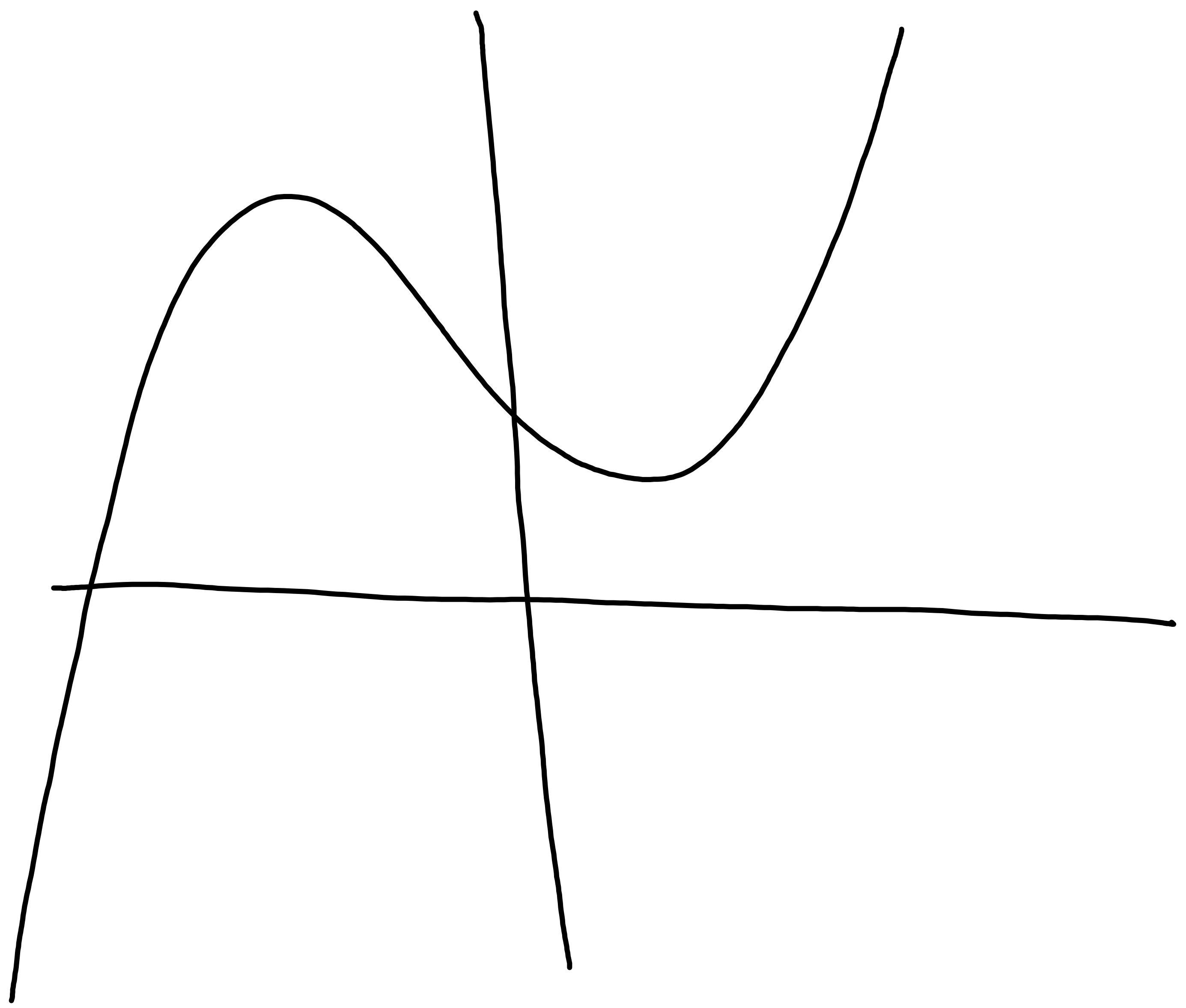
Polynom 3. stupně

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$1 = x^0$

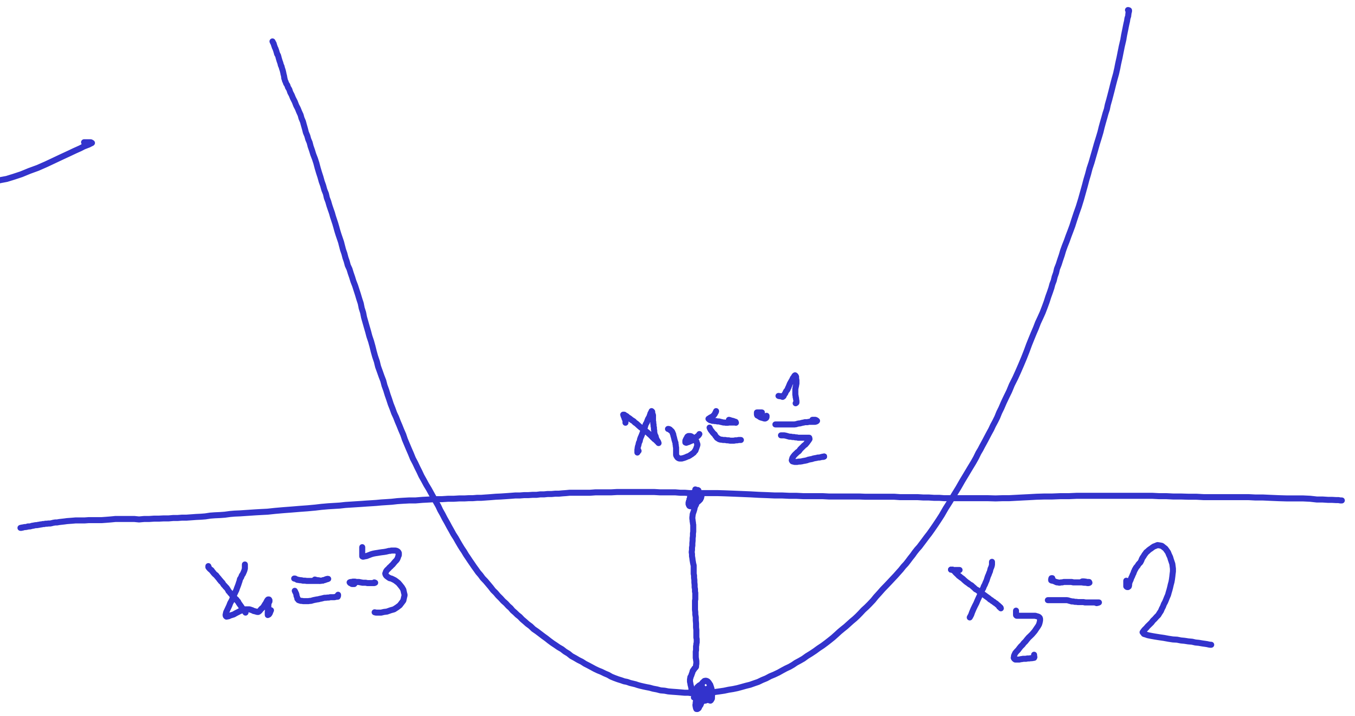
$a_3 > 0$





Najdite graf, vrchol paraboly a kořeny funkce

$$f(x) = x^2 + x - 6$$



Vrchol

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = c - \frac{b^2}{4a} = -6 - \frac{1^2}{4} = -\frac{25}{4}$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1(-6) = 25 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$f(x) = (x-(-3))(x-2)$$
$$= (x+3)(x-2)$$

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou celá čísla

Jestliže f má za kořen racionální číslo $\frac{r}{s}$ (v zákl. tvaru)

pak ① r dělí a_0

② s dělí a_n

PŘÍKLAD

$p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 15$

$x_0 = \frac{r}{s}$

r dělí 15 $\quad r \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

s dělí 1 $\quad s \in \{1\}$

$s > 0$

Hornerovo schéma

x_0	$a_3=1$	$a_2=4$	$a_1=-2$	$a_0=-15$
3	1	$1\cdot 3+4=7$	$7\cdot 3-2=19$	$19\cdot 3-15=42=p(3)\neq 0$ není kořen
1	1	5	3	$-12=p(1)\neq 0$ není kořen
-3	1	1	-5	$0=p(-3)$ je kořen

$$((1x_0+4)x_0-2)x_0-15 = x_0^3+4x_0^2-2x_0-15=p(x_0)$$

$$p(x)=x^3+4x^2-2x-15=(x-(-3))(x^2+x-5)=(x+3)(x^2+x-5)$$

Korzeny x^2+x-5 : $\Delta = 1^2 - 4(1)(-5) = 21 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 15 = (x+3)\left(x + \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$$

Komplexní čísla

Rovnice $x^2 = -1$ nemá řešení v reálných číslech,

neboť $x^2 \geq 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Komplexní čísla vznikla tak, že se k reálným číslům přidala další čísla tak, aby

(1) rovnice $x^2 = -1$ měla řešení

(2) aby se s těmito čísly počítalo podle stejných pravidel jako s reálnými.

Značení kompl. čísel je $\mathbb{C}$

1) vezmeme „imaginární jednotku" i jako řešení rovnice $x^2=-1$, tj. $i^2=-1$

2) přidáme všechny reálné násobky čísla i

$$ai, \quad a\in\mathbb{R}$$

$$ai+bi=(a+b)i$$

$$ai\cdot bi = a\cdot b\cdot i\cdot i=-ab\in\mathbb{R}$$

3) vezmeme všechny součty

$$a+bi, \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad i^2=-1$$

$$(a+bi)+(c+di) \overset{}{\underset{\text{def}}{=}} (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bic + bidi$$

$$= ac + (ad+bc)i + bd\underbrace{i^2}_{=-1}$$

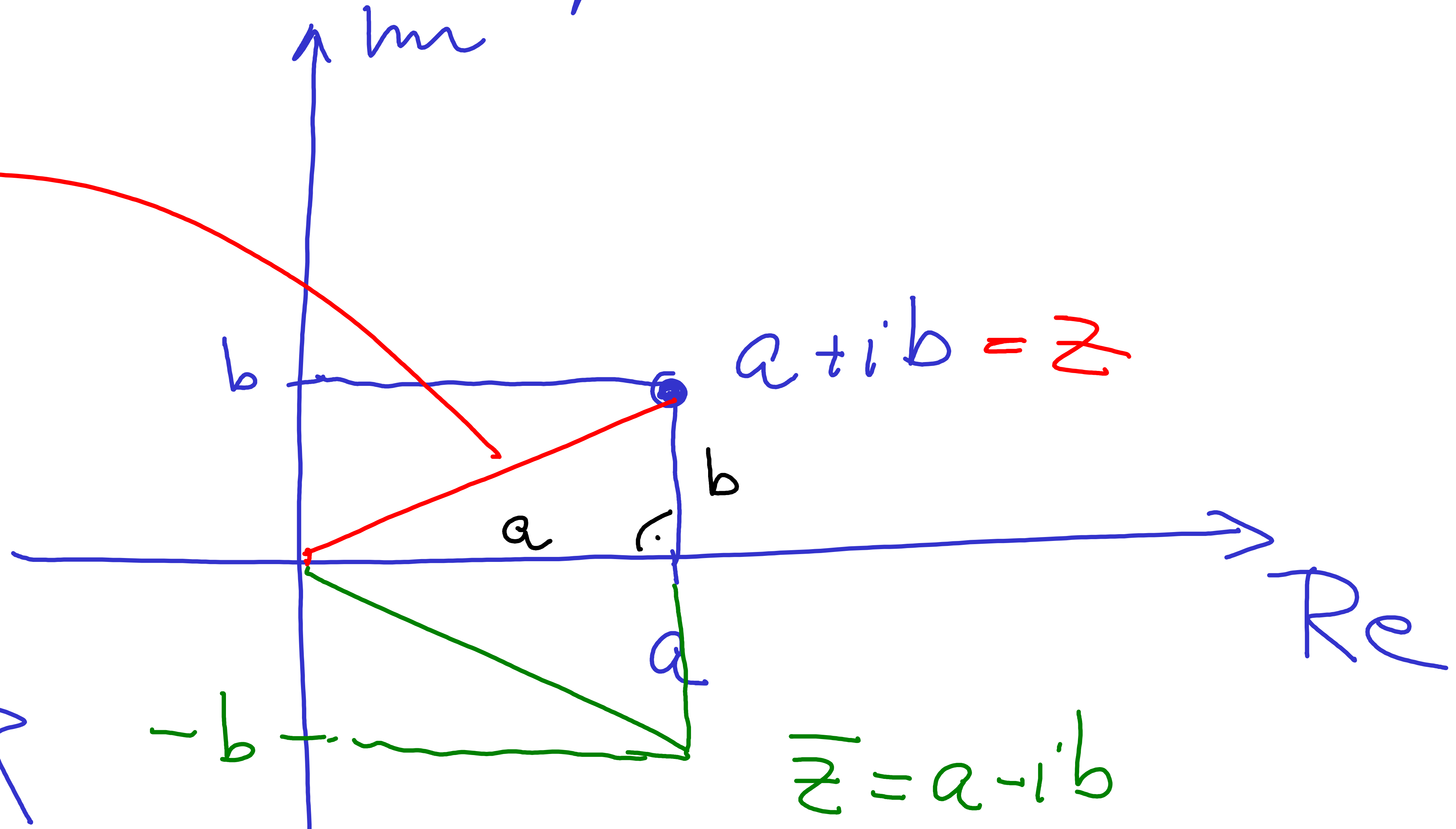
$$\underset{\text{def}}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Znázornění kompl. čísel v rovině

$\sqrt{a^2+b^2}$

$= |z|$

abs. hodnota kompl. čísla



$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

a → reálná složka; b → imag. složka

Komplexně sdružené číslo k číslu $z = a + ib$ je $\bar{z} = a - ib$

$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 \underbrace{-abi+bia}_{0} - b^2 i^2$

$= a^2 + b^2$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Převrácené číslo ke komplexnímu číslu $z = a+ib$

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

$$\frac{2-3i}{13} \cdot (2+3i) = \frac{(2-3i)(2+3i)}{13} = \frac{2^2+3^2}{13} = \frac{13}{13} = \underline{1}$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Reálná čísla $a = a + 0 \cdot i$ $\quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$(a+bi) + 0 = (a+bi) + (0+0\cdot i) = a + b\cdot i$$

$$(a+bi)\cdot 1 = (a+bi)(1+0\cdot i) = a+bi$$

Rovnice $x^2+1=0$ má řešení i

$$(-i)^2 = \left((-1)\cdot(i)\right)^2 = (-1)^2 i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$

ale také $-i$

$$x^2+1 = (x-i)(x+i) = x^2 + xi - ix - i\cdot i = x^2+1$$