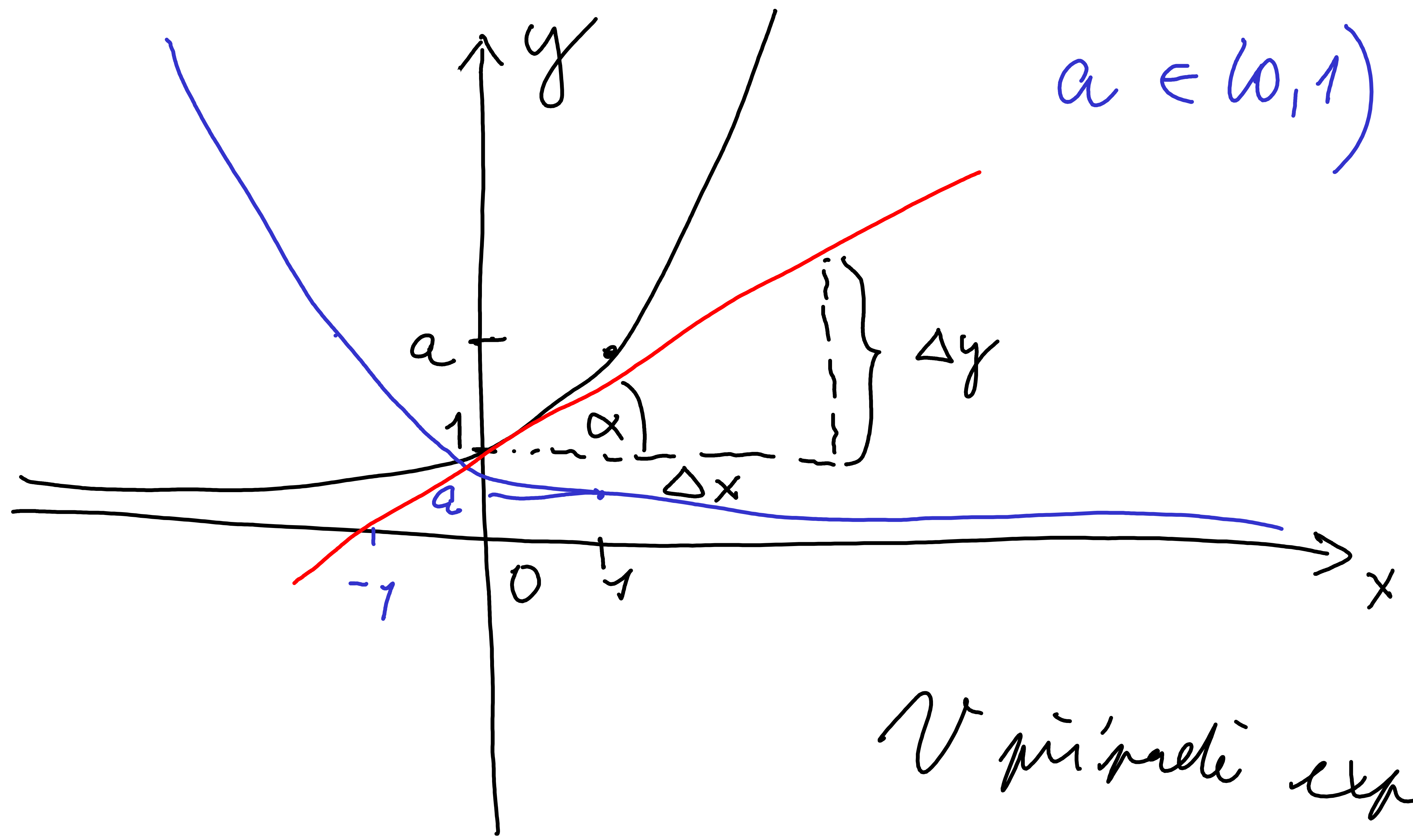
Exponenciální funkce

$f(x) = a^x$, $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$a > 1$



$a \in (0,1)$

Speciální hodnota

$a = e \doteq 2{,}71\ldots$

Eulerova konstanta

Směrnice tečny přímky je $\operatorname{tg}\alpha$

V případě exponenciály se základem e

je tato směrnice rovna 1.

$$y' = y$$ jejíž řešení je $y(x) = a e^x$

Inverzní funkce k funkci $f(x) = a^x$ je logaritmus při základu a

$$g(x) = \log_a x$$ je číslo takové, že

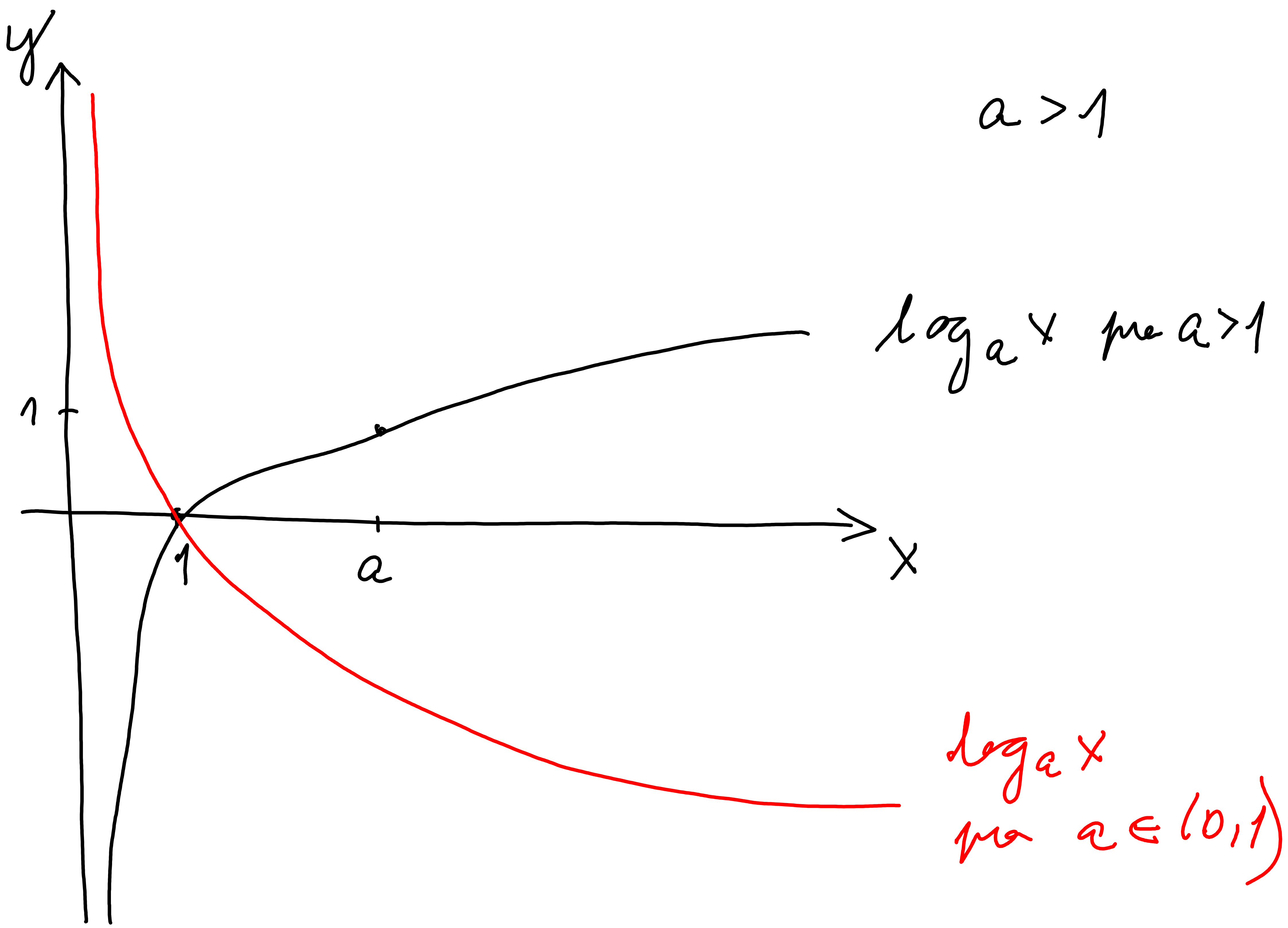
$$a^{\log_a x} = x$$

Def. obor $(0, \infty)$

Obor hodnot $\mathbb{R}$

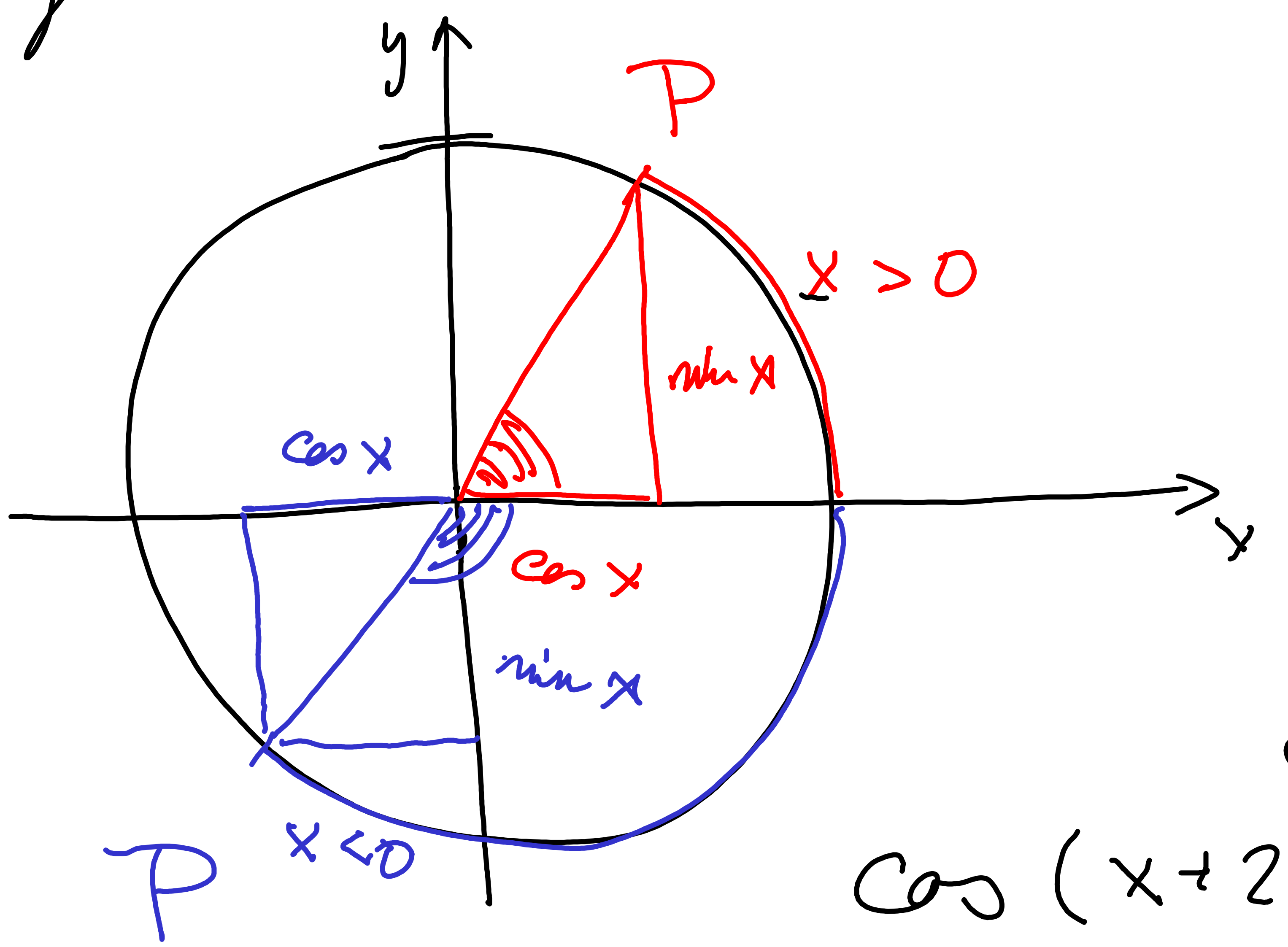
Přirozený logaritmus
je logaritmus
při základu e

$\ln x = \log_e x$



Goniometrické funkce

Jednotková kružnice



$P = [\cos x, \sin x]$

Délka oblouku x měří velikost úhlu

Další možnost je měřit velikost úhlu ve stupních

Délka kružnice o poloměru 1 ... 2π

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ $\quad \sin(x+2\pi) = \sin x$ $\quad 360^\circ$

Říkáme, že sin a cos jsou periodické s periodou 2π

Def. obor je $\mathbb{R}$

Obor hodnot je $[-1, 1]$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

Obor hodnot $H(\operatorname{tg}) = H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	—
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	—	0
π	0	-1	0	—
$3\pi/2$	-1	0	—	0
2π	0	1	0	—

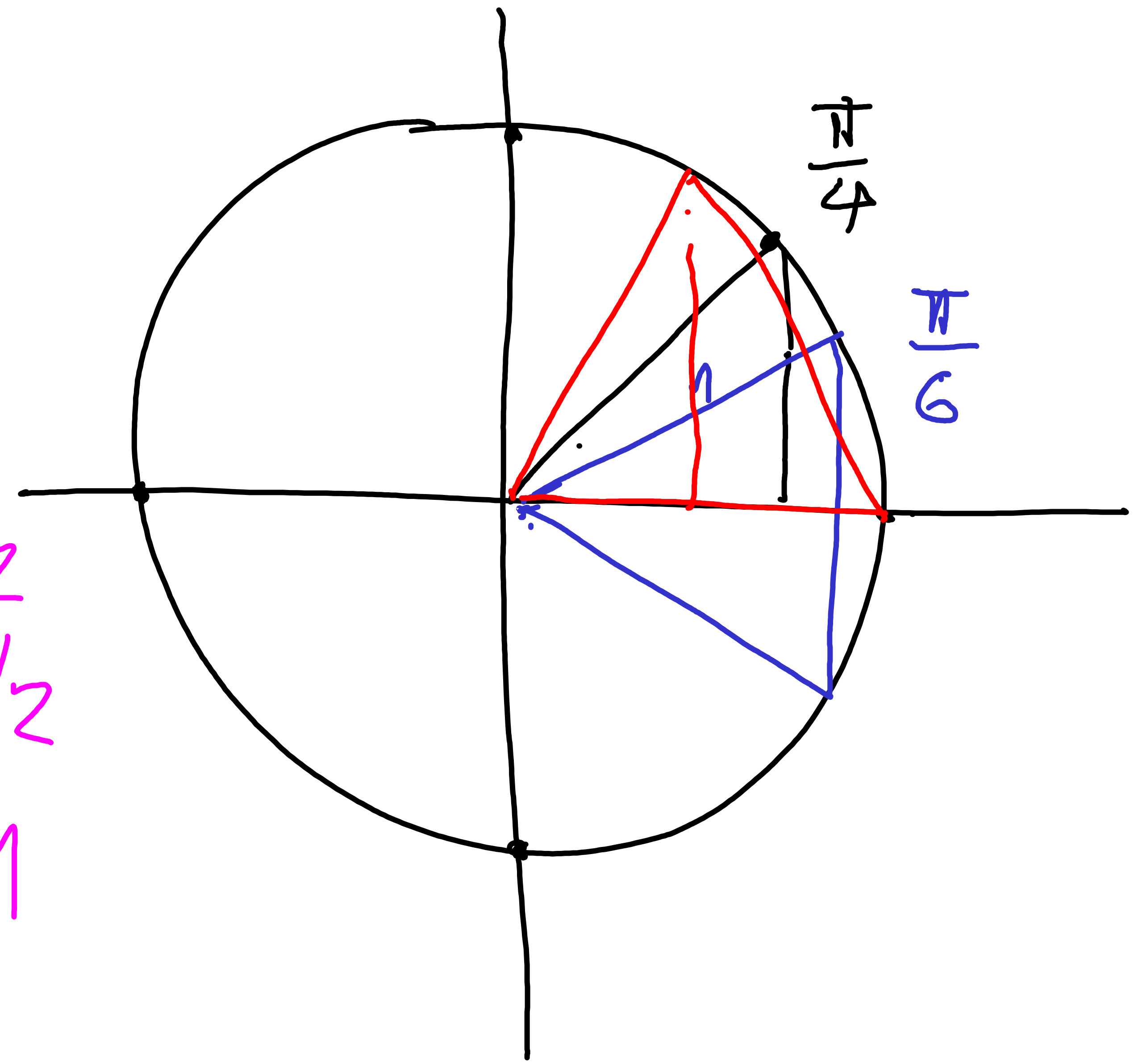
$\sqrt{0/4} = 0$

$\sqrt{1/4} = 1/2$

$\sqrt{2/4} = \sqrt{2}/2$

$\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$

$\sqrt{4/4} = 1$

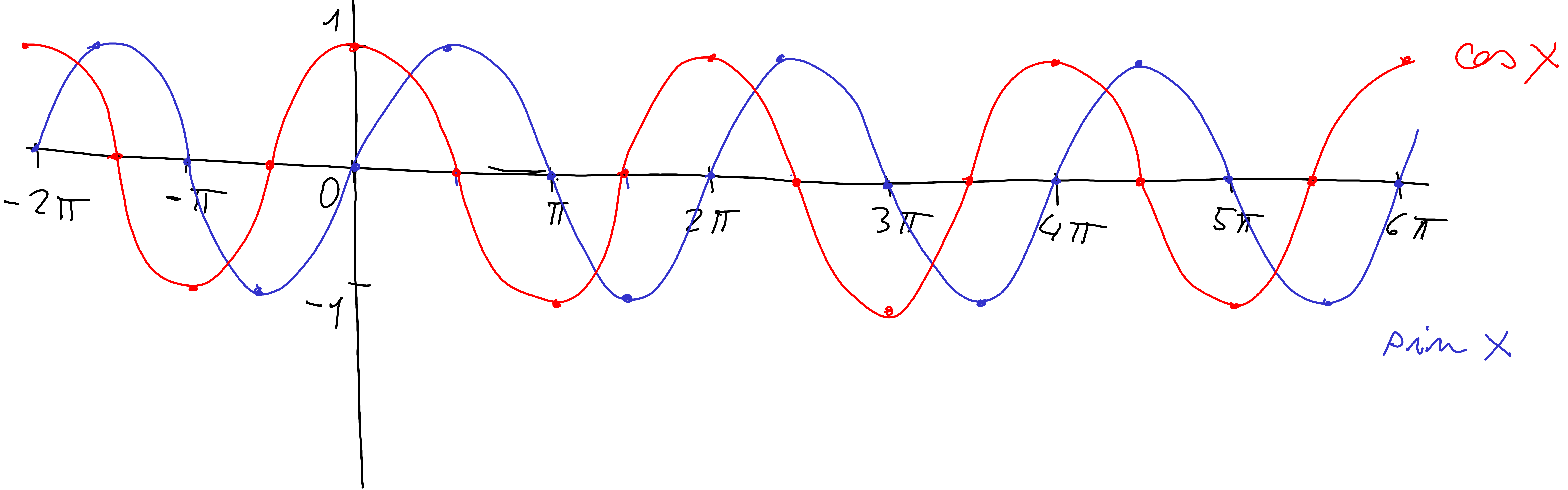


Grafy

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

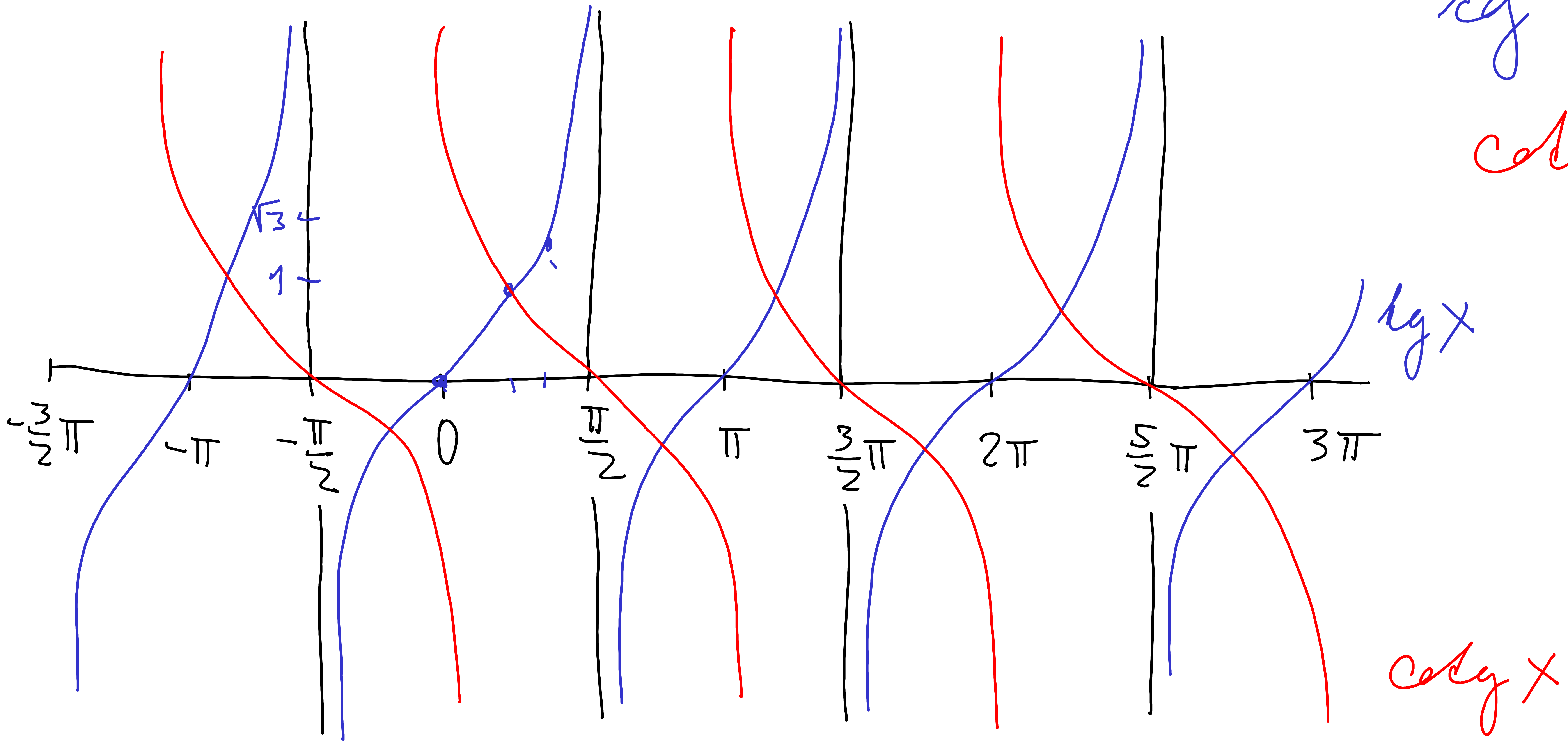
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

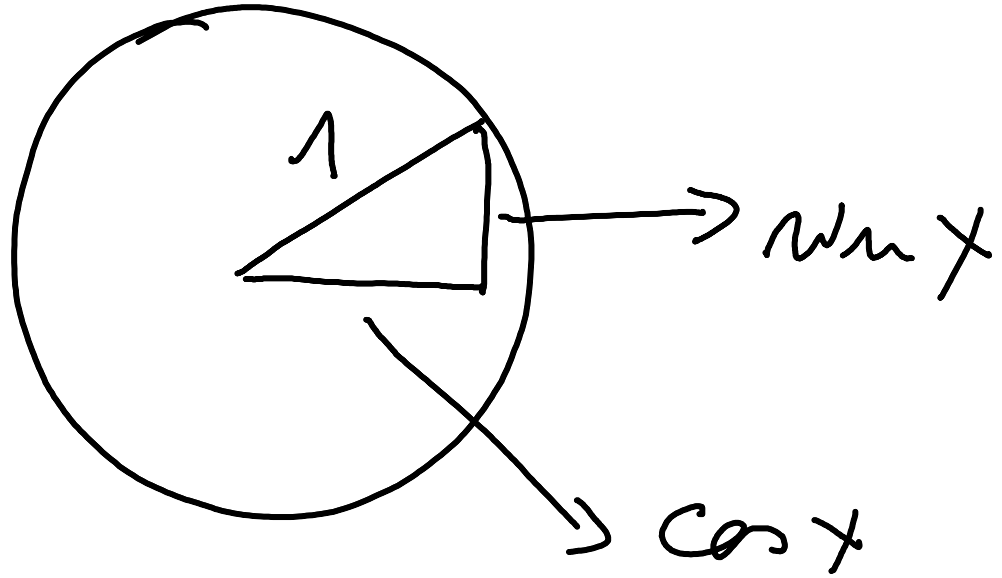


$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$$



Základní vztahy



- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ Pyth. věta
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$
- $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Součtové vzorce

(1) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

(2) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

(3) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ plyne z (1)

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

Ze součtu vzorců lze odvodit

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

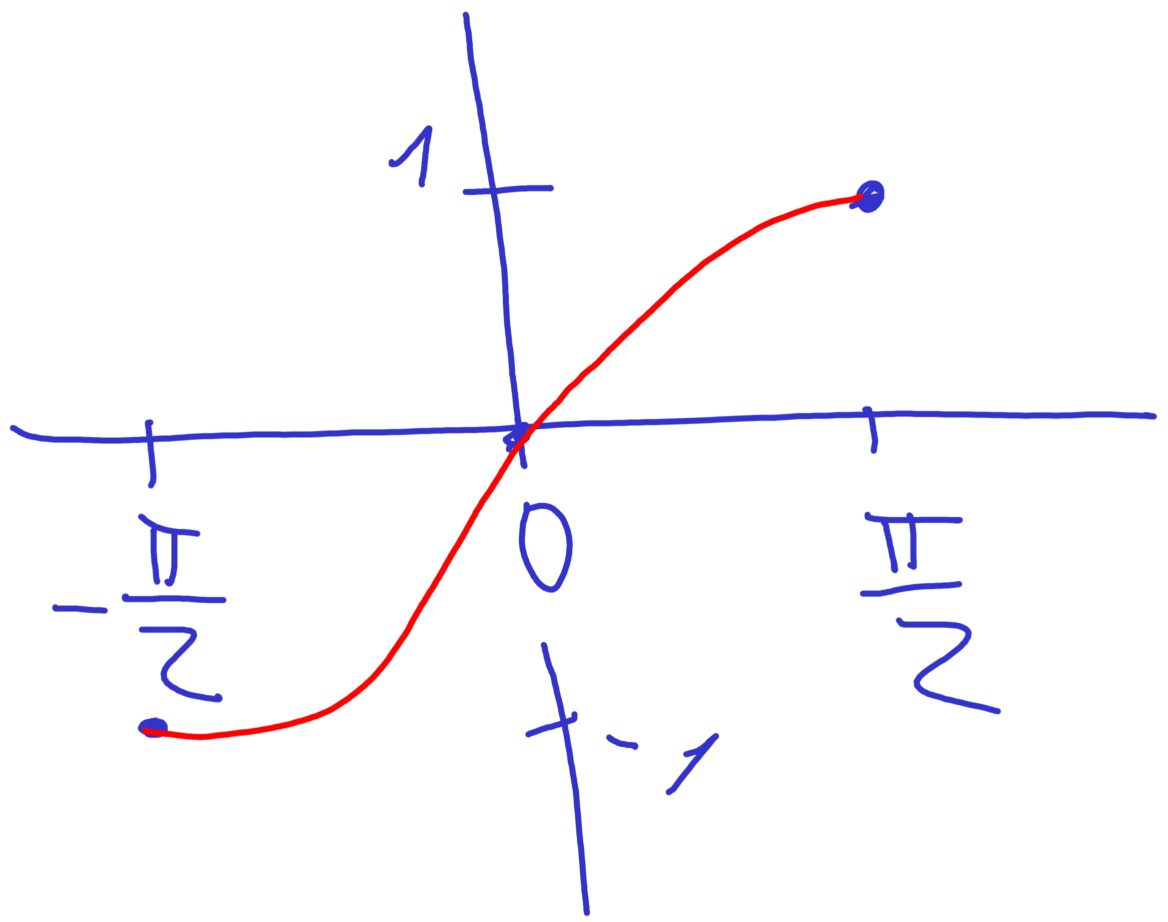
$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Inverzní funkce ke goniometrickým – cyklometrické funkce

- arcus sinus arcsin
  arcus cosinus arccos
  arcus tangens arctg

Funkce sinus je prostá na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

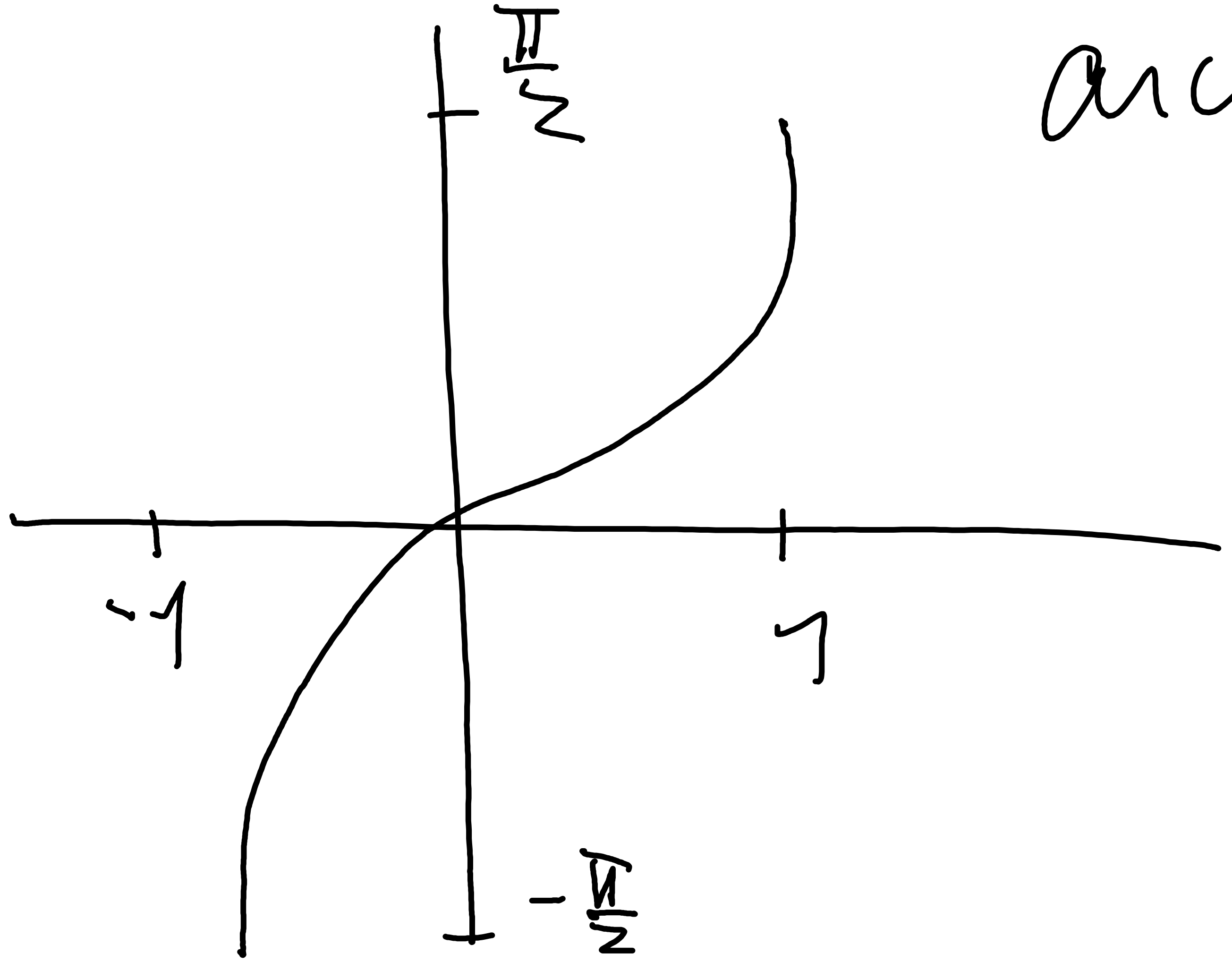


sin je zde rostoucí funkce

Inverzní funkce k $\sin/_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

je funkce

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$\arcsin x$ je číslo v intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ takové, že jeho sinus je roven x

$\arcsin 0 = 0 \qquad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Funkce cos je prostá (klesající) na $[0, \pi]$

Inverzní funkce ke $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

se nazývá

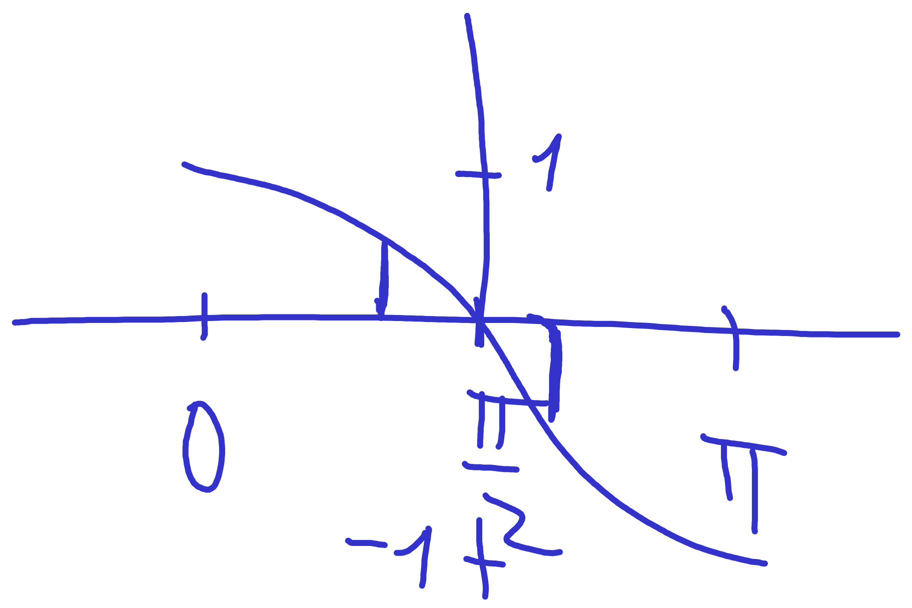
$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) =$

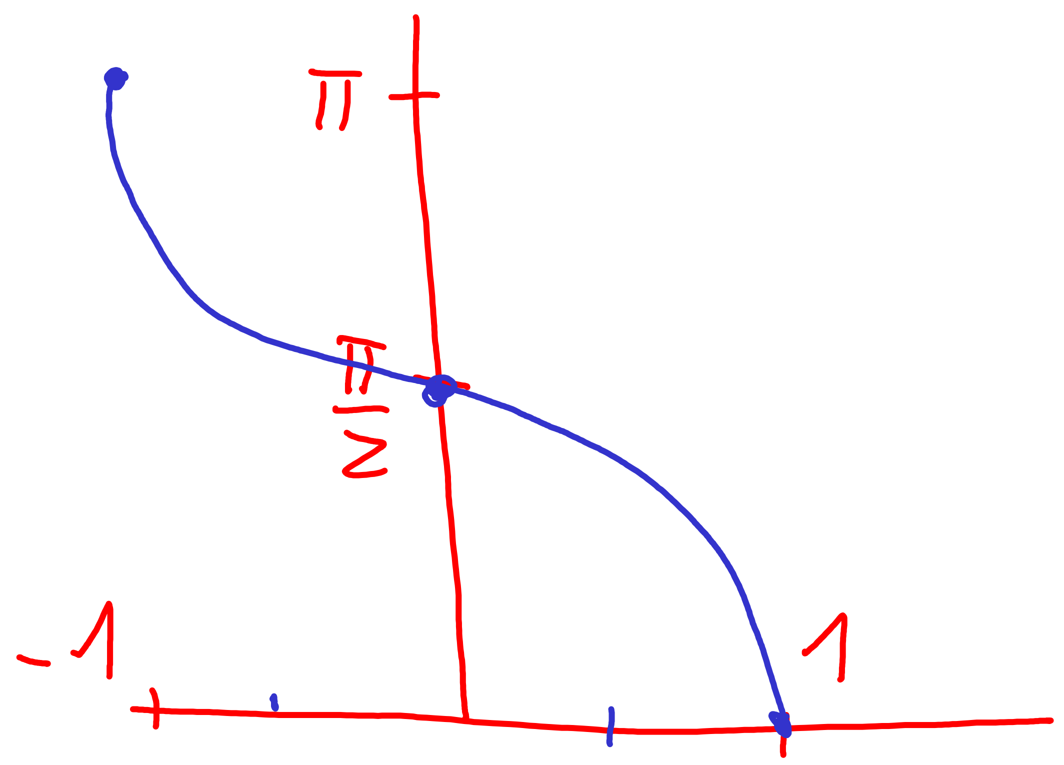
$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos -\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi$

cos



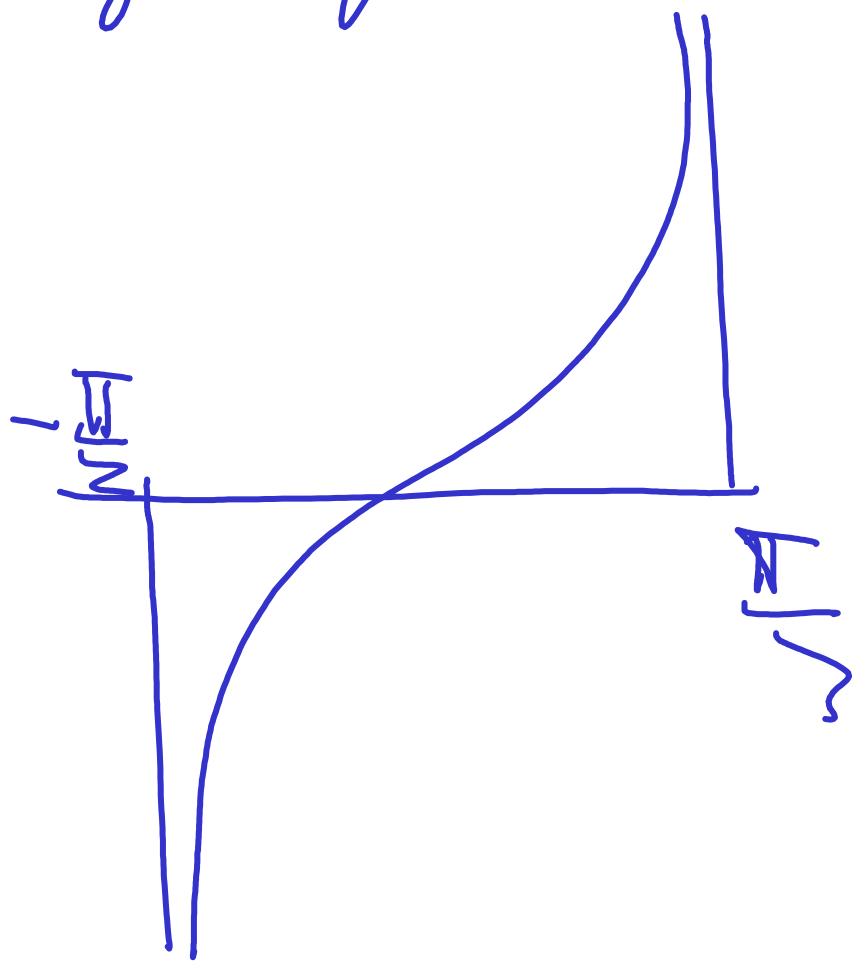
arccos

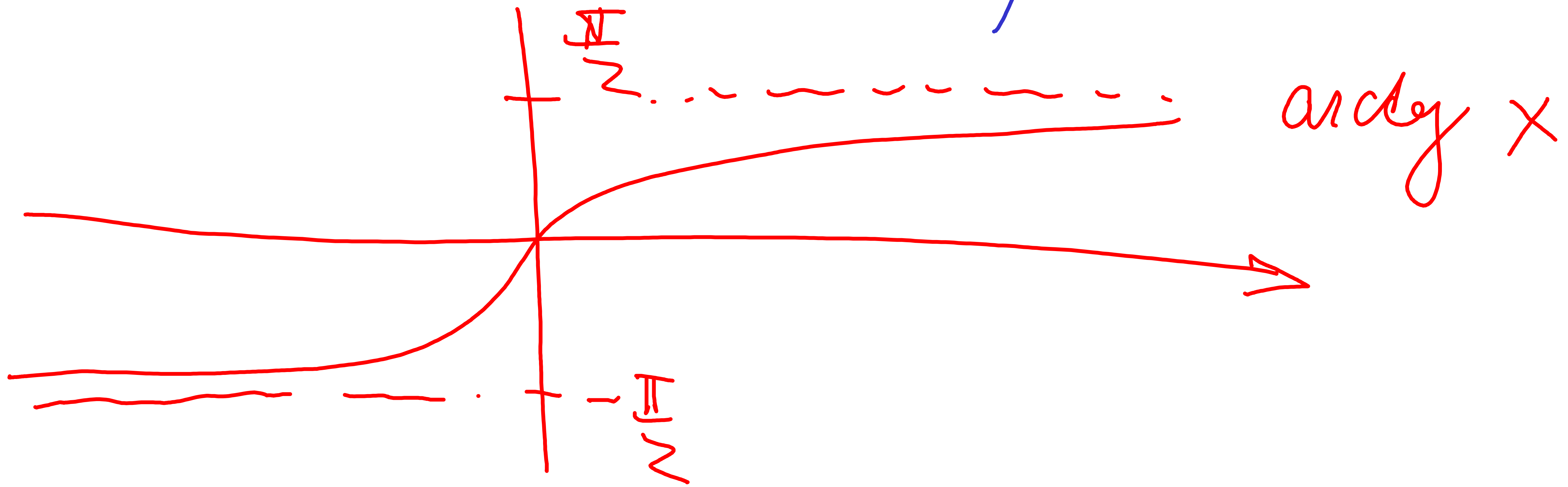


tg je prostá (rostoucí) na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Inverzní funkce k $tg / \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

je funkce arctg $: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$





V přípravě k přednášce jsou definice tzv. hyperbolických funkcí

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \underline{1}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$

1. domácí úloha

obor hodnot

$\cancel{[4, -6]} = \{x \in \mathbb{R}, 4 \le x \le -6\} = \emptyset$

arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$\longrightarrow \cancel{[\pi, 0]}$

$\arccos(-1) = \pi$

$\arccos(1) = 0$