Písemka uprostřed semestru 25. 10. 12–14

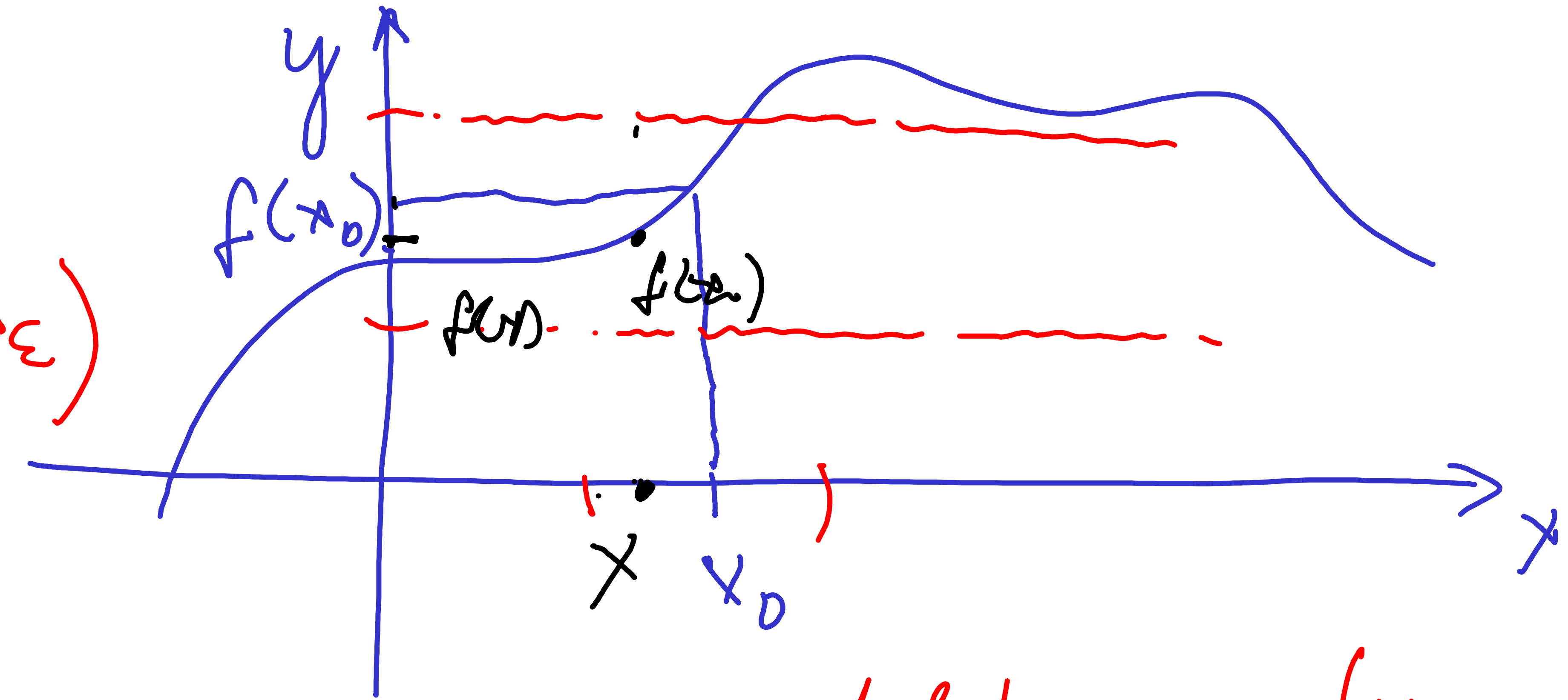
nebo 1. 11. 12–14

# Spojité funkce a limita funkce

Intuitivně: spojitost funkce $f$ v bodě $x_0$ znamená, že když se s $x$ blížíme k $x_0$, tak $f(x)$ se blíží $f(x_0)$.

okolí $f(x_0)$

$(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$




okolí $x_0$ $\quad (x_0-\Delta,\ x_0+\Delta)$

## Definice:

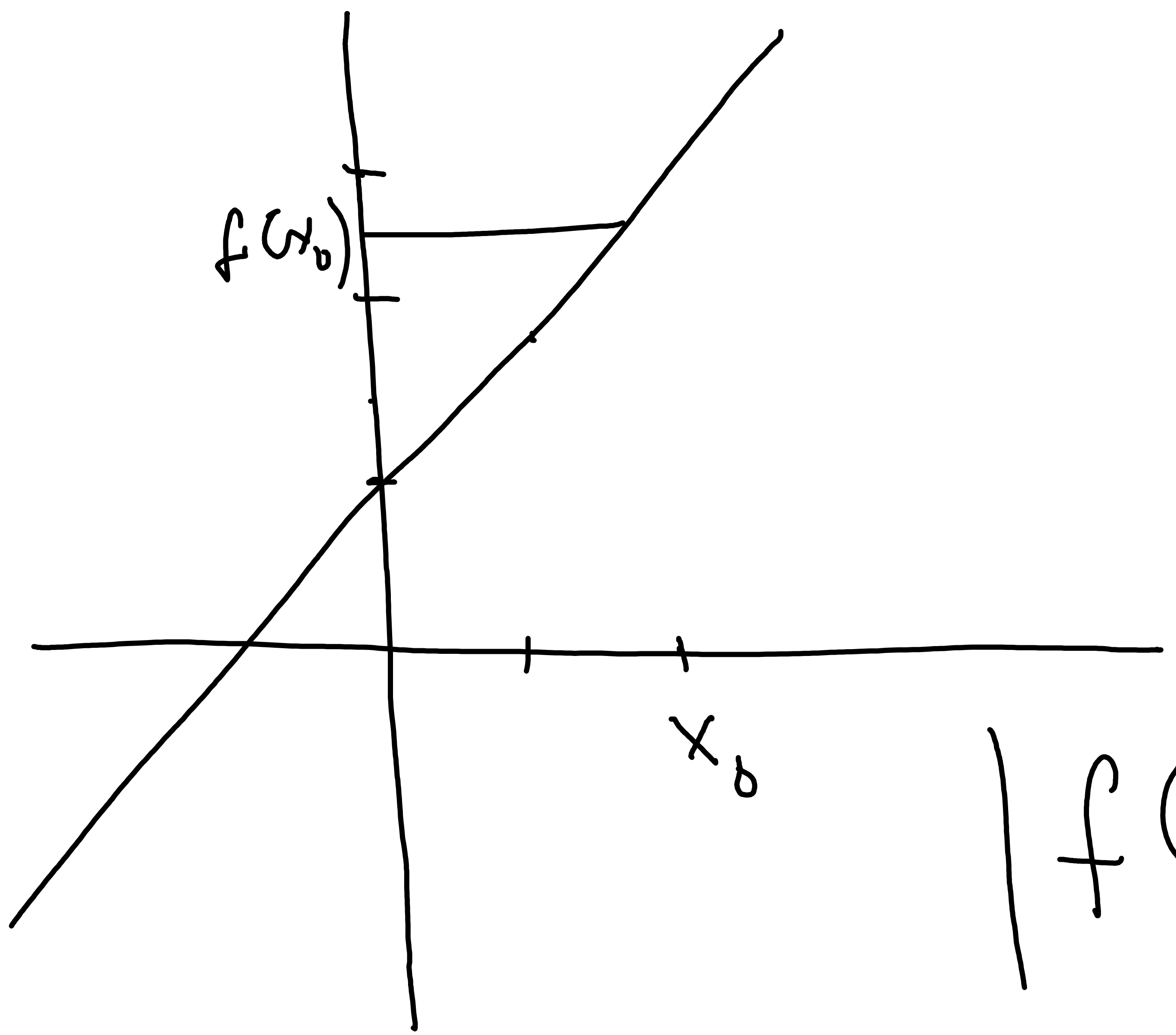
Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta > 0$, že když $x \in (x_0-\Delta,\ x_0+\Delta)$,

je $f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$.

$|x - x_0| < \Delta$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Příklad: $f(x) = 2x+3$ a ukážeme, že $f$ je spojitá v každém bodě $x_0$




$\varepsilon > 0$ $\qquad \varepsilon = 0{,}01$

$\exists\, \Delta = \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \Delta = 0{,}005$

$|x - x_0| < \Delta$

$x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) = (x_0 - 0{,}005, x_0 + 0{,}005)$

$|f(x) - f(x_0)| = |2x+3-(2x_0+3)| =$

$$= |2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < 2\Delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$f(x) \in \Big(f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0 + \varepsilon)\Big) = \Big(f(x_0) - 0{,}01,\ f(x_0) + 0{,}01\Big)$$

## Věty o spojitosti

1. funkce $f(x) = ax$ je spojitá v každém bodě

2. Nechť $f$ a $g$ jsou spojité v bodě $x_0$. Pak funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ a $\frac{f(x)}{g(x)}$ (pokud $g(x_0) \neq 0$) jsou spojité v bodě $x_0$.

<u>Definice</u>: Funkce $f$ je spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru

Z tvrzení 1 a 2 plyne, že funkce

- $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, .... $x^n$ jsou spojité
- polynomiální funkce $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je spojitá
- rac. lomená funkce je spojitá v def. oboru

(3) Exponenciální funkce $a^x$ je spojitá a $\log_a x$ je spojitá.

(4) Goniometrické i cyklometrické funkce jsou spojité.

**Věta 3** Je-li $f$ spojitá v $x_0$ a $h$ je spojitá v $f(x_0)$, je spojitá i složená funkce

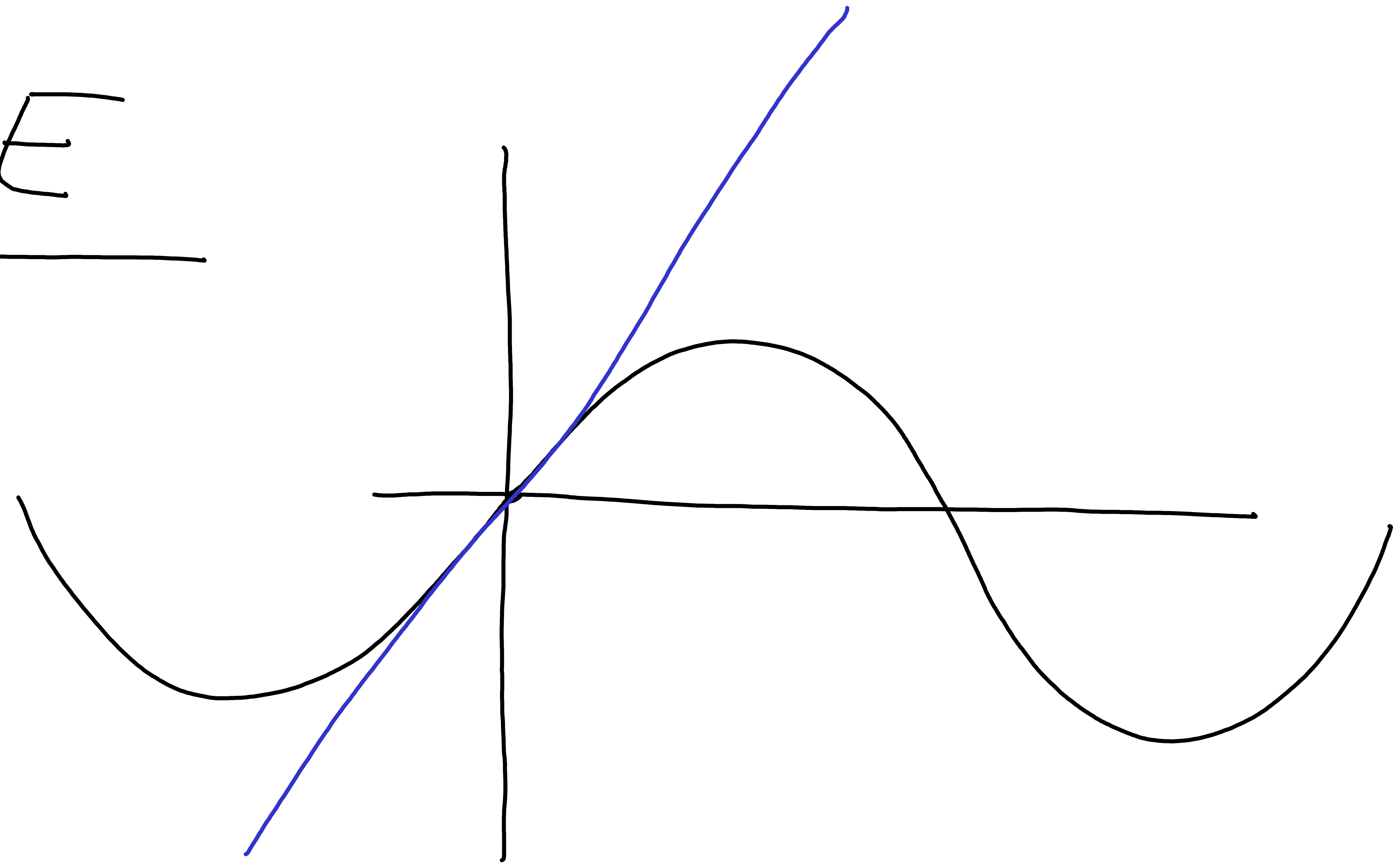
$$g(x) = h(f(x))$$

v bodě $x_0$.

$f(x) = \sin x^2$ je spojitá, neboť $x^2$ je spojitá funkce a sin je spojitá funkce.

# LIMITA FUNKCE

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Pro x blížící se 0, je f(x) blízko 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definice: Nechť intervaly $(x_0-\Delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\Delta) \subseteq \mathcal{D}(f)$ pro nějaké pevné $\Delta$.

Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (\in \mathbb{R})$

jestliže
pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ $\quad 0 < |x - x_0| < \delta$

platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. $\quad$ $\delta$ závisí

$|f(x) - L| < \varepsilon$. $\quad$ na $\varepsilon$, zatímco $\Delta$ je pevné.

## Příklad:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Def. obor $(-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$

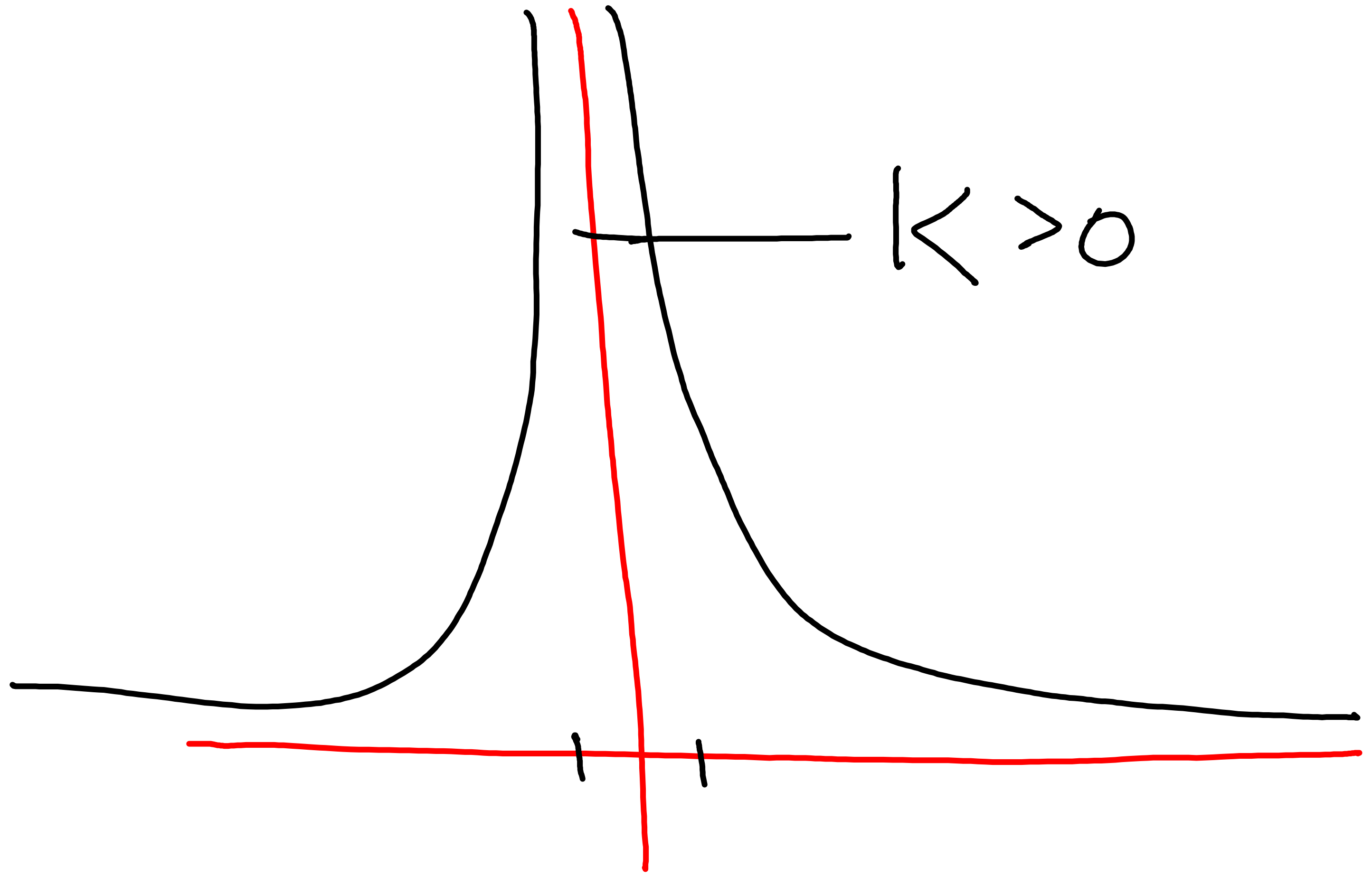
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = (-1)-1 = \underline{\underline{-2}}$$

spojitá v $-1$

## Příklad

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$



<u>Definice:</u> Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

jestliže pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f(x) > K$.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad K > 0 \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{K}} \quad 0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{K}}$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{1}{|x|} > \sqrt{K}$$

$$\frac{1}{x^2} > K$$

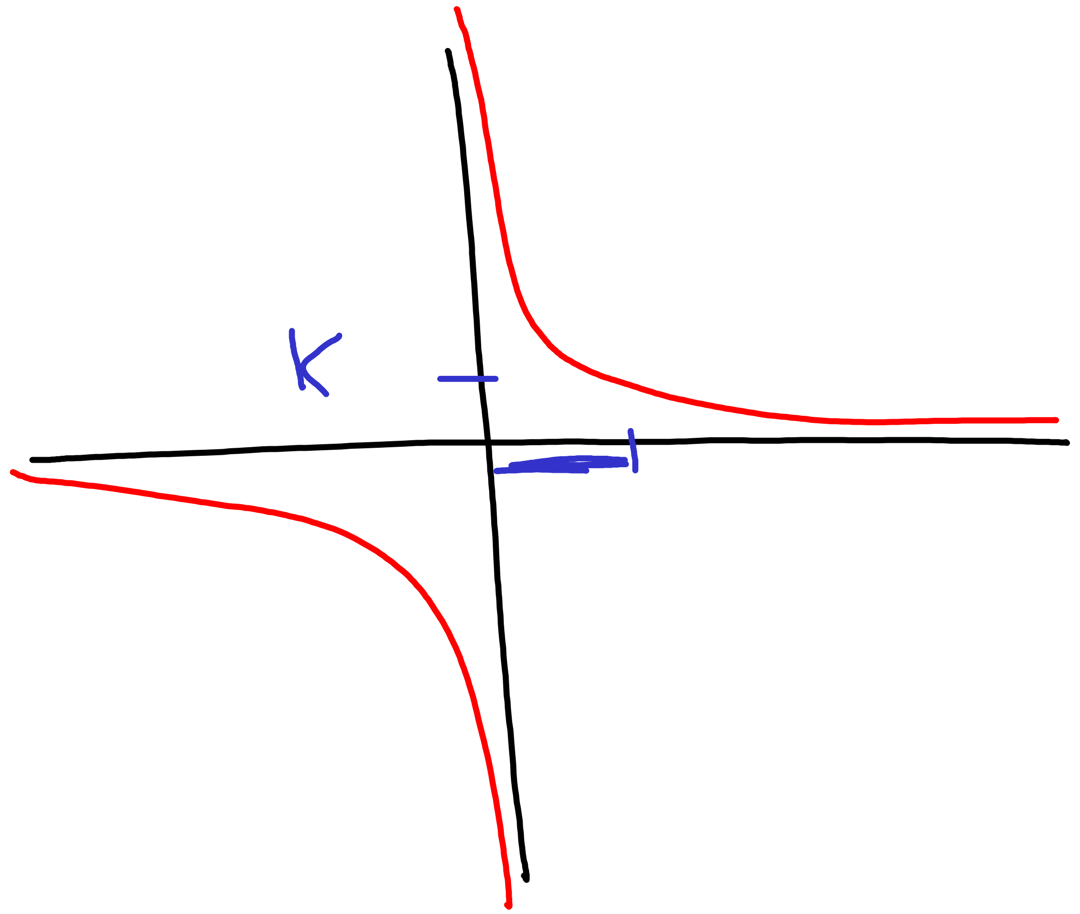
$$f(x) = \frac{1}{x^2} > K$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Pro každé $K < 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $x$, $0 < |x - x_0| < \delta$

je $f(x) < K$.

**Příklad** $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

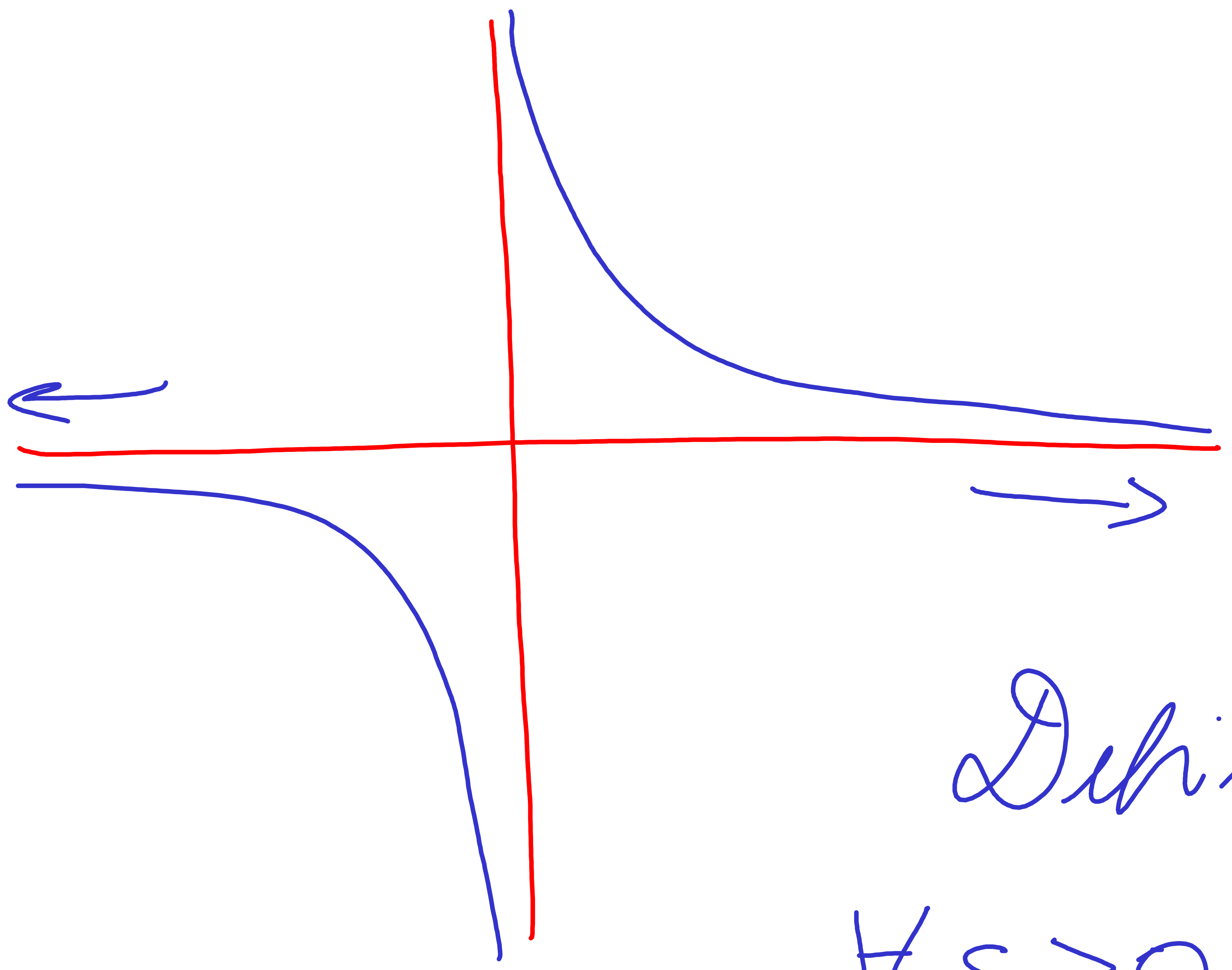



V tomto případě píšeme

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Příklad $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Definice $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K < 0$ že pro $x < K$ je $|f(x) - L| < \varepsilon$.

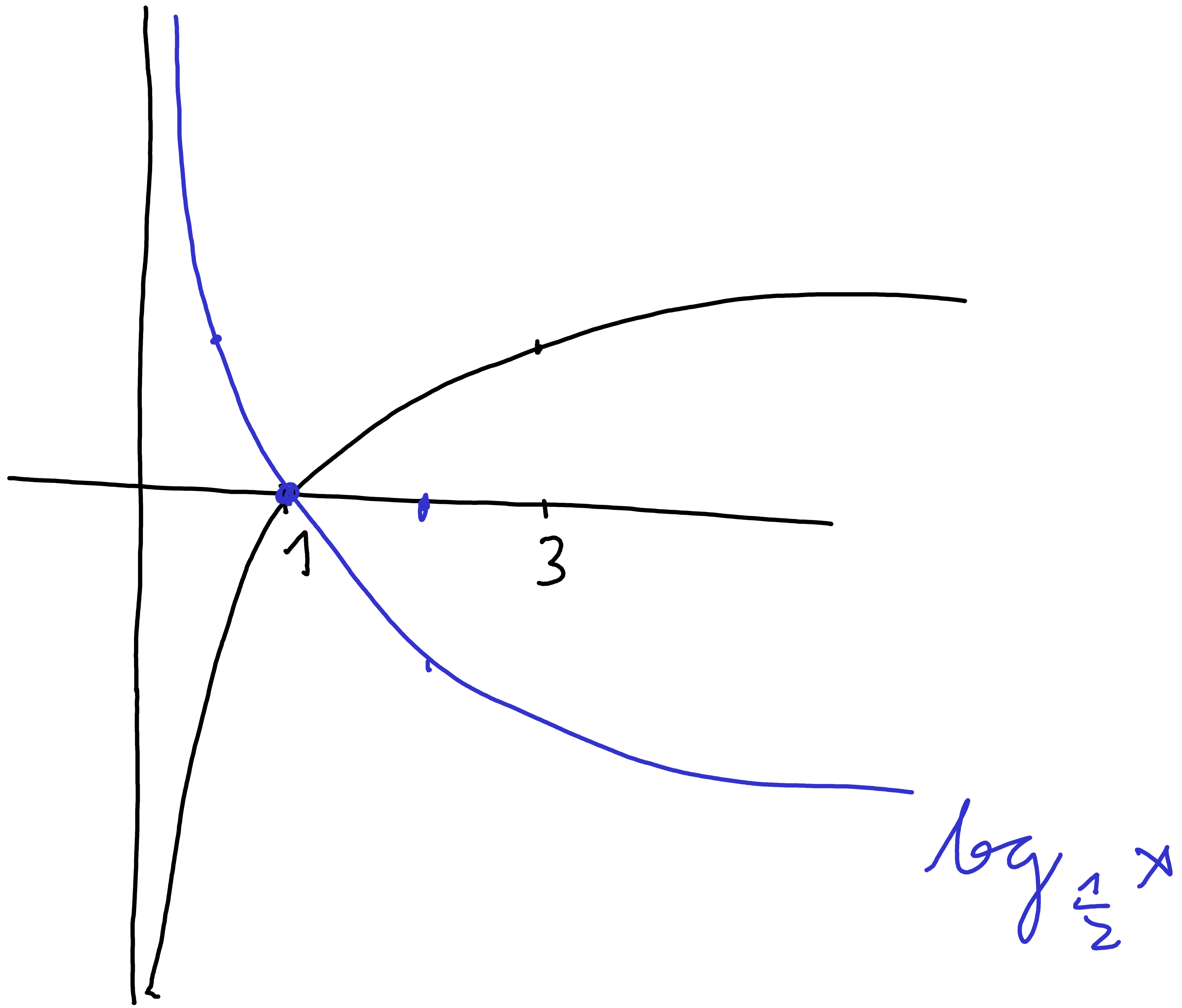
**Příklad**

$$\lim_{x \to 0_+} \log_3 x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_3 x = \infty$$

$$\lim_{x \to 0_+} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$$



## Příklad

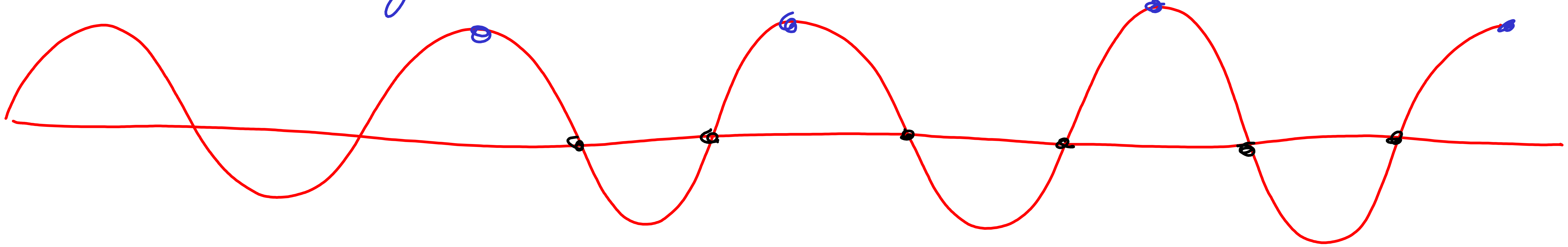
$f(x) = \sin x$

$|\sin x| \le 1$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \sin x$$

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Tato limita neexistuje.



Příklad $g(x) = \frac{1}{x} \sin x \qquad x > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

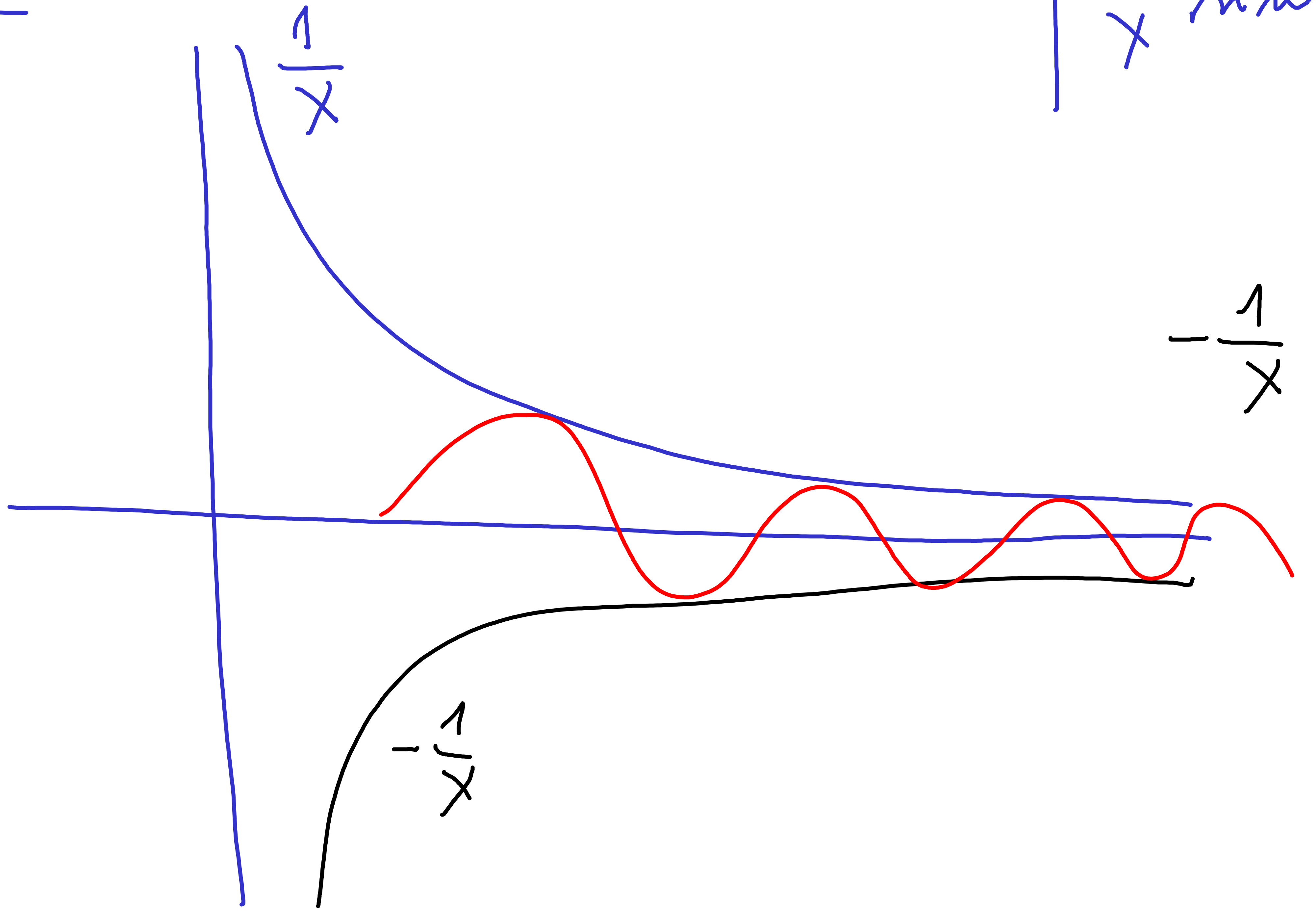
$$\left| \frac{1}{x} \sin x \right| \leq \frac{1}{x} |\sin x| \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} \sin x \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$



# Pravidla pro počítání s limitami

① Je-li $f$ spojitá v $x_0$, je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

② Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, pak

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L \pm M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

Jestliže $M \neq 0$ je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

Zápis $x \to x_0$ lze nahradit zápisem $x \to x_{0+}$, $x \to x_{0-}$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

Za jedno z $L$ a $M$ lze vzít $+\infty$ nebo $-\infty$

$$L + \infty = \infty \qquad L - \infty = -\infty$$

$$L>0 \quad \infty \cdot L = \infty \qquad \infty \cdot L = -\infty \text{ pro } L<0$$

$$\frac{L}{\infty} = 0$$

limity tvaru $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ mohou vyjít různě

typ $\frac{0}{0}$ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

$\lim\limits_{x \to 0_-} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0_+} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$

Příklady: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2-8x-7\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)$

$(\infty-\infty-7)$

$\quad \infty \quad (2-0-0)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty} 2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}\right)$

$= \infty\cdot(2-0-0) = \infty\cdot 2 = \infty$

Příklad: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 8x - 1}{3x^3 - 19x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2\left(2 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(3 - \frac{19}{x}\right)} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{19}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 - \frac{19}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\infty} \cdot \frac{2}{3} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

**Příklad:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-19x^2}{2x^2+8x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{19}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{19}{x}}{2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty\cdot\frac{3}{2}=-\infty$$

Obecně

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\dots+a_0}{b_px^p+\dots b_0}=\begin{cases}\infty & n>p \text{ a } \frac{a_n}{b_p}>0\\ -\infty & n>p \text{ a } \frac{a_n}{b_p}<0\\ 0 & n<p\\ \frac{a_n}{b_p} & \text{pro } n=p\end{cases}$$

Formální: $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \infty$ $\quad \forall K > 0 \quad \exists \delta > 0$

pro každé $\quad$ existuje

že pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ platí

$$f(x) > K$$

$\lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$

$\forall K < 0 \quad \exists \delta > 0$

že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) < K$.

Hodnota $\frac{\sin x}{x}$ pro $x$ blížící se 1 se blíží k $\frac{\sin 1}{1} = \sin 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 1}{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Toto platí pro funkce spojité v $x_0$.