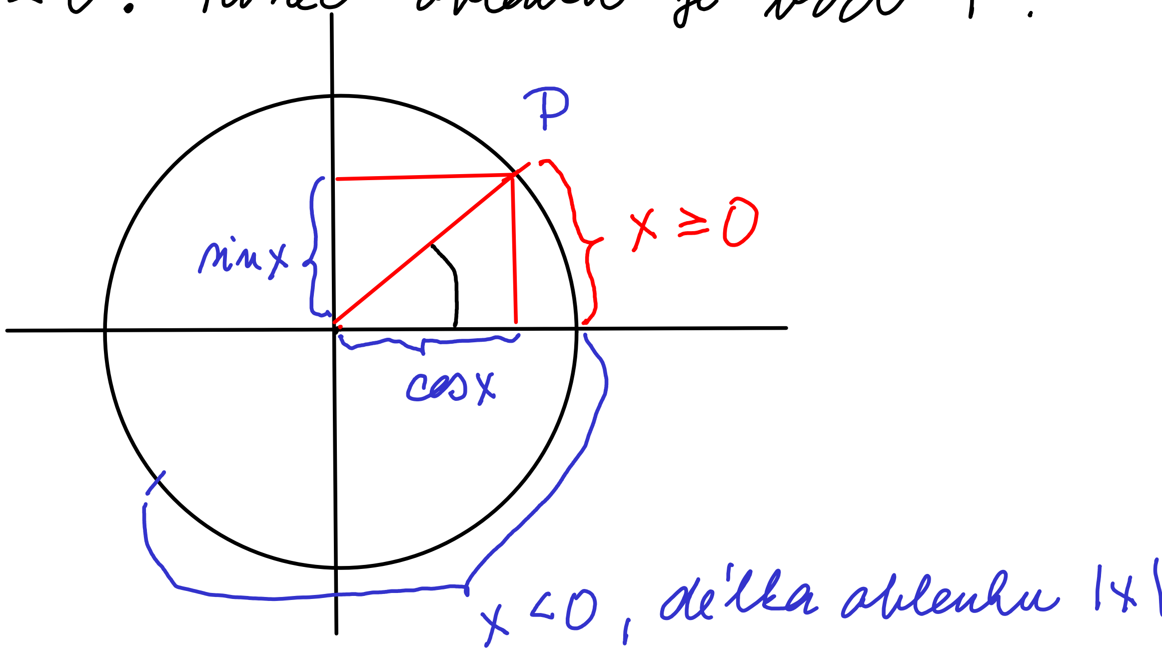
M1035 4. přednáška

# Goniometrické funkce

**Definice:** Vezmeme kružnici v rovině se středem v počátku a poloměrem 1. Pro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ vezmeme oblouk kružnice měřený od bodu $[1,0]$ délky $|x|$. Oblouk bereme proti směru hodinových ručiček, když $x \geq 0$, a v opačném směru, když $x < 0$. Konec oblouku je bod $P$.




$\cos x$ = 1. souřadnice bodu $P$

$\sin x$ = 2. souřadnice bodu $P$

Velikost úhlu vyznačeného na obrázku měříme tedy pomocí délky oblouku nebo ve stupních.

Dále definujeme

$$\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Velikost celé jednotkové kružnice je $2\pi$, kde $\pi$ je iracionální číslo, nazývá se Ludolfovo číslo a jeho prvních 60 cifer je

$\pi \doteq$ 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944

## Hodnoty v některých argumentech

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\text{tg}\, x$ | $\text{cotg}\, x$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\sqrt{0}/2 = 0$ | $\sqrt{4}/2 = 1$ | $0$ | – |
| $\pi/6$ | $\sqrt{1}/2 = 1/2$ | $\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2$ | $1$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$ | $\sqrt{1}/2 = \frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\pi/2$ | $\sqrt{4}/2 = 1$ | $\sqrt{0}/2 = 0$ | – | $0$ |
| $\pi$ | $0$ | $-1$ | $0$ | – |
| $3\pi/2$ | $-1$ | $0$ | – | $0$ |
| $2\pi$ | $0$ | $1$ | $0$ | – |

Funkce cos a sin jsou periodické s periodou $2\pi$, tj

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

Jejich definiční obor je zřejmě celé $\mathbb{R}$.

Definiční obor funkce $\operatorname{tg} x$ je

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \dots \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \dots$$

Definiční obor funkce $\operatorname{cotg} x$ je

$$D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

Funkce tg a cotg jsou na svých definičních oborech periodické s periodou $\pi$:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x$$

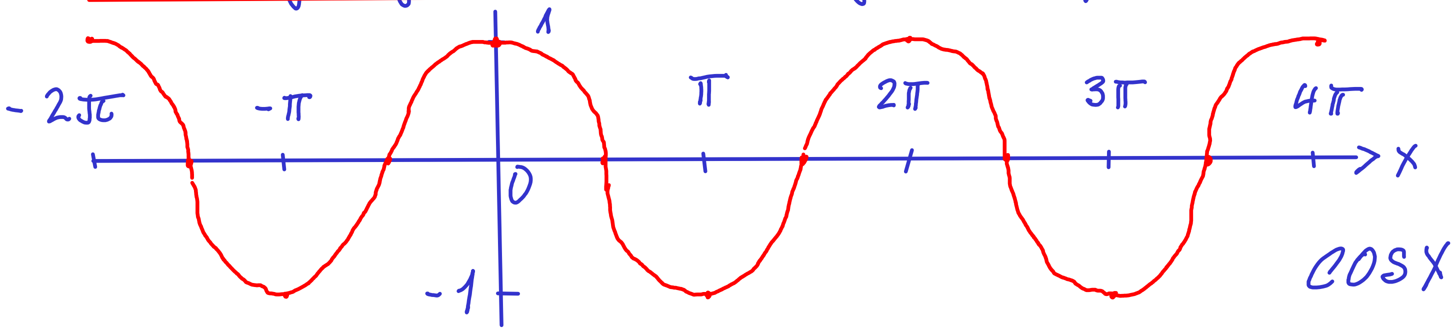
Funkce $\cos x$ je sudá, tj

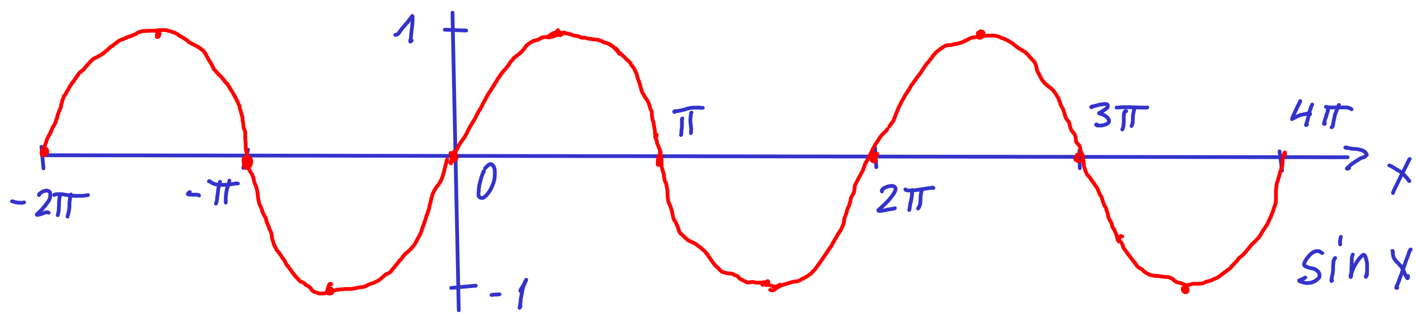
$$\cos(-x) = \cos x$$

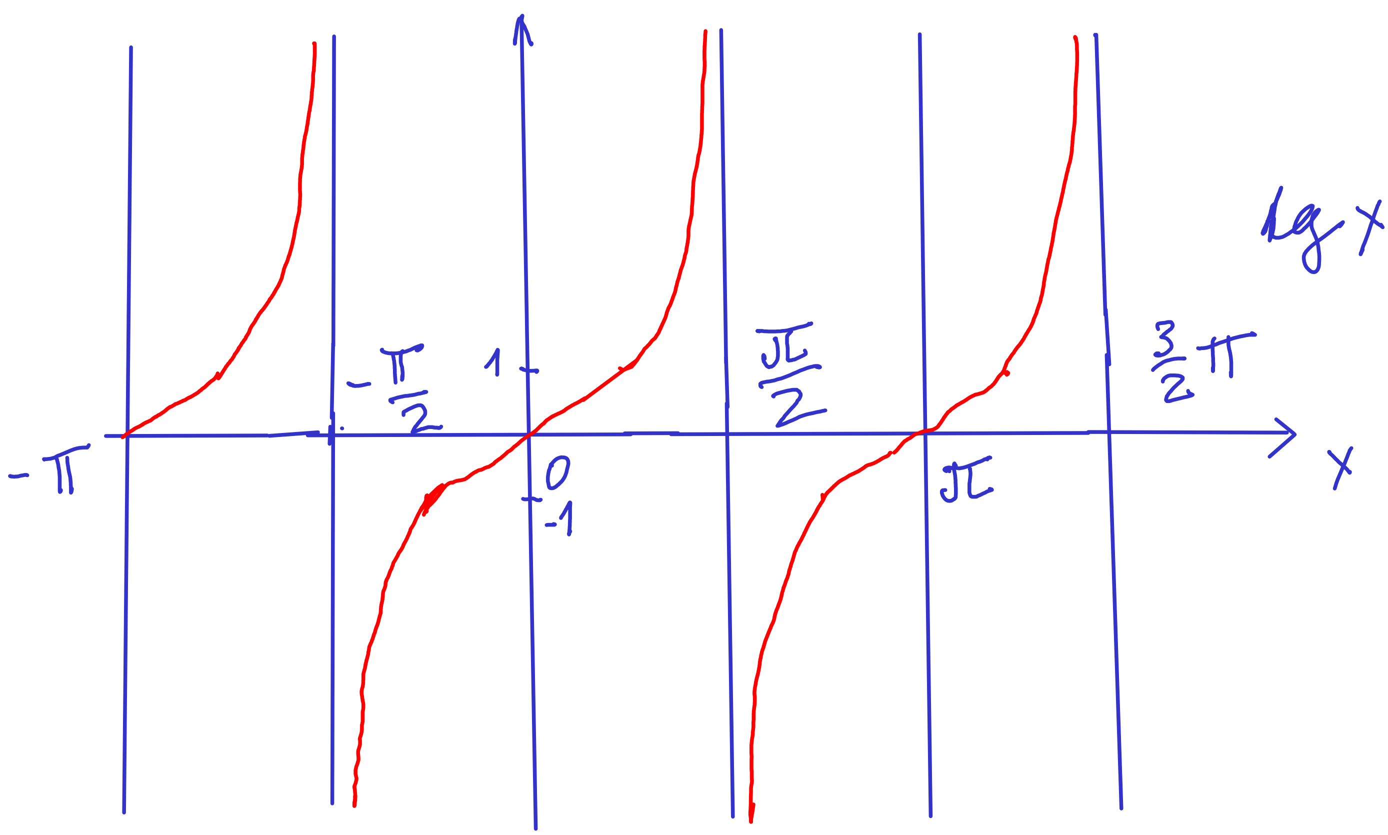
Funkce $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou liché

$$\sin(-x) = -\sin x .$$

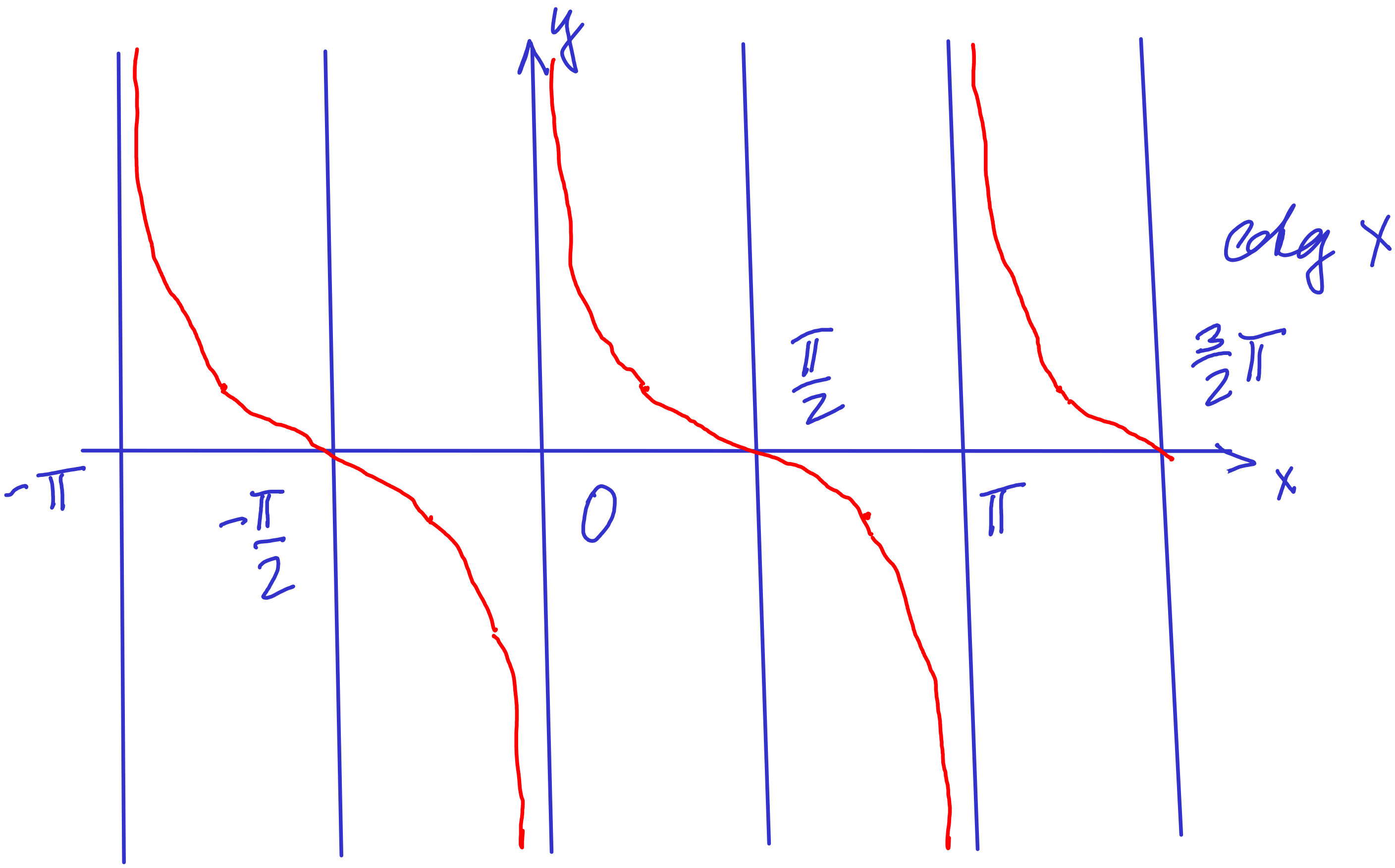
## Grafy goniometrických funkcí




Funkce tg je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$




Funkce cotg je klesající na intervalech $(k\pi, k\pi + \pi)$.

## Základní vztahy

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ Pythagorova věta

$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$ definice

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\mathrm{cotg}\, x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

## Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$$

## Speciálně

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Z těchto vzorců lze odvodit další:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\ ; \quad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

## Inverzní funkce ke goniometrickým

Funkce sin je rostoucí na intervalu

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

a nabývá tam hodnot z intervalu

$$[-1, 1].$$

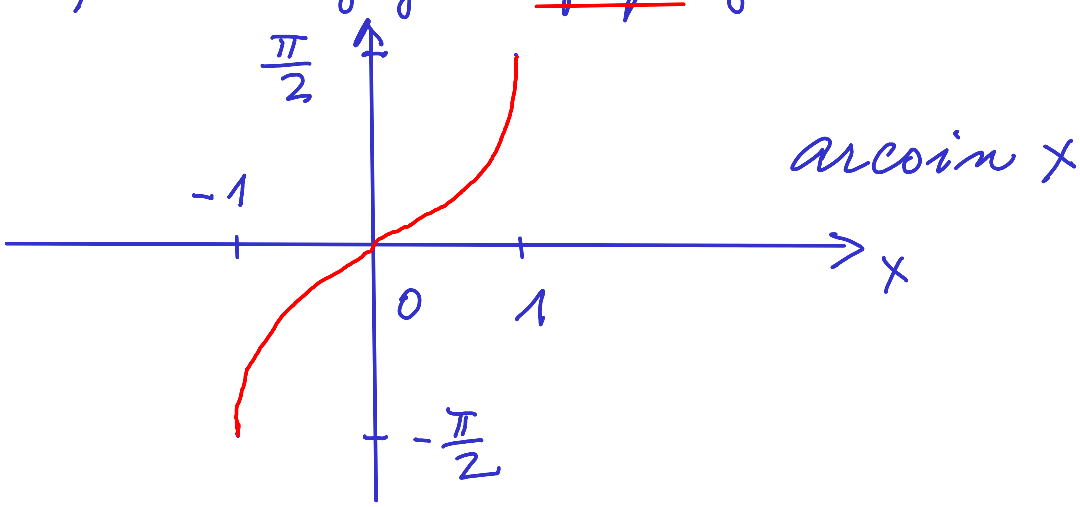
Inverzní funkce k funkci

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

je funkce arcus sinus

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

je rostoucí (neboť sin na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je rostoucí) a její graf je



Funkce $\cos x$ je klesající na intervalu

$$[0, \pi]$$

a nabývá tam hodnot z $[-1,1]$.

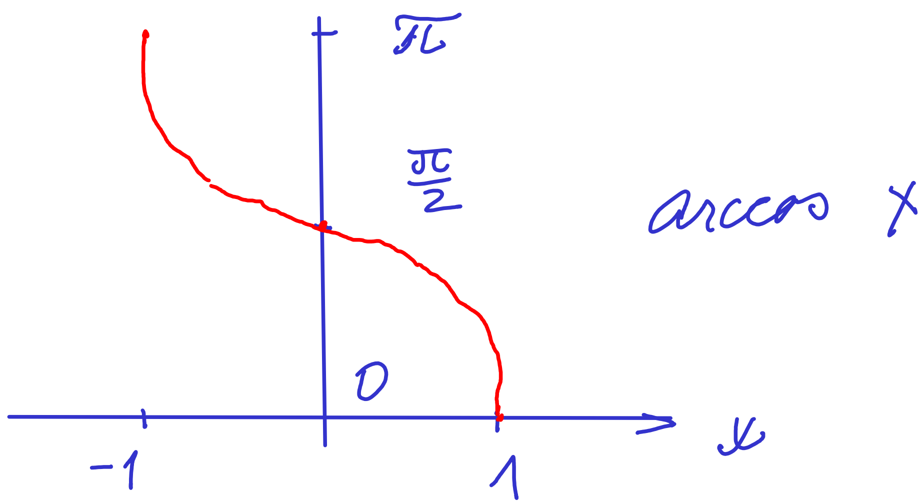
Inverzní funkce ke

$$\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$$

se nazývá arcus cosinus

$$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi].$$

arccos je klesající a jeho graf je

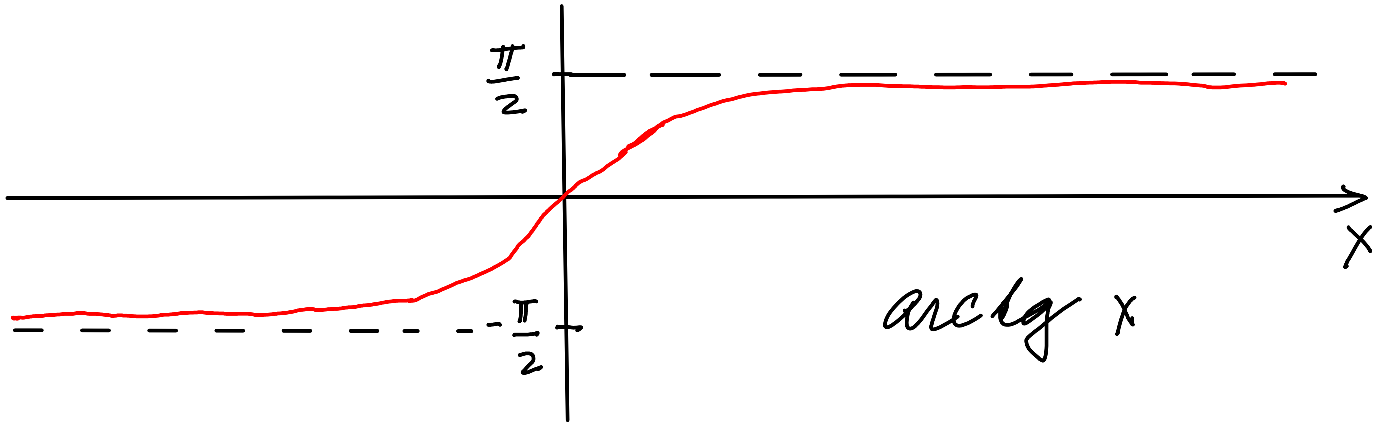



Funkce tg je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a nabývá tam hodnot v $(-\infty, \infty)$. Proto definujeme inverzní funkci k funkci

$$\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty),$$

nazývá se arcus tangens.

je rostoucí a její graf je




Inverzní funkce ke goniometrickým se uplatňují při integraci.

Souhrnně se nazývají cyklometrické funkce.

## Hyperbolické funkce

mají v jistém smyslu vlastnosti podobné goniometrickým funkcím. Jsou definovány takto:

cosinus hyperbolický

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

sinus hyperbolický

$$\sin x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

tangens hyperbolický

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

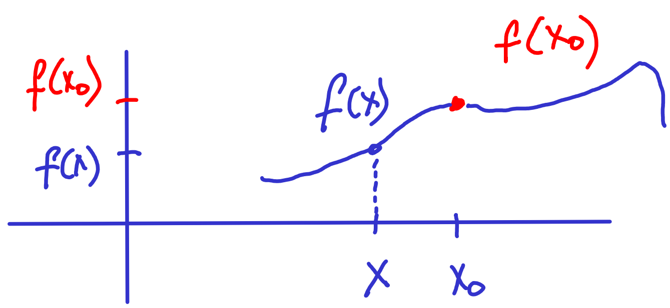
Hyperbolické funkce splňují vztah

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

# Spojitost funkcí

Všechny funkce, se kterými jsme se doposud setkali byly spojité ve svých definičních oborech.

Intuitivně: Funkce $f$ je spojitá v bodě $x_0$, jestliže hodnoty $f(x)$ jsou blízké hodnotě $f(x_0)$, kdykoliv je $x$ blízké $x_0$.




Matematicky:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$$

obecný a existenční kvantifikátory

Slovně:

Pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je
$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Skutečnost, že $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ lze psát také pomocí nerovnosti
$$|x - x_0| < \delta$$
(Vzdálenost $x$ od $x_0$ je menší než $\delta$.)

Obdobně skutečnost, že $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ můžeme psát
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Příklad}}$ Funkce $f(x) = 2x + 3$ je spojitá.

Ukážeme podle definice. Zvolme $\varepsilon > 0$. K danému $\varepsilon$ vezmeme $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Ukážeme spojitost v každém $x_0$. Nechť tedy
$$|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$
Potom
$$|(2x+3) - (2x_0+3)| = |2(x - x_0)| = 2|x - x_0| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Funkce $f$ je spojitá na intervalu, je-li spojitá v každém jejím bodě.

**Věta 1** Nechť jsou funkce $f$ a $g$ spojité v bodě $x_0$. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

$$f \pm g, \quad f \cdot g \quad \text{a} \quad \frac{f}{g} \quad \text{je-li } g(x_0) \neq 0.$$

**Věta 2** Je-li funkce $f$ spojitá v bodě $x_0$ a funkce $h$ spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$. Pak i složená funkce

$$h \circ f$$

je spojitá v bodě $x_0$.

**Příklad** Polynomiální a racionální funkce jsou spojité na svém definičním oboru.

(1) Funkce $f(x) = x$ je spojitá → dokážeme stejně jako spojitost funkce $f(x) = 2x+3$ v předchozím příkladu.

(2) Spojitost konstantní funkce $f(x) = a$ je zřejmá.

(3) Z věty 1 plyne, že funkce $x \cdot x$, $x^2 \cdot x$, ... $x^n$, $a x^n$ a $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ jsou spojité. Ze spojitosti podílu plyne, že racionální lomená funkce je spojitá.