

M1035

6. přednáška

Dodatek ke spojitosti

Veřa o nabývání mezihodnot: Necht' funkce
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nechť
 $f(a) < f(b)$.

Podle ní každé $c \in (f(a), f(b))$ existuje
 $x_0 \in (a, b)$ tak, že
 $f(x_0) = c$

Příklad: Řešte rovnici

$$2^x = 11 - x$$

Rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$f(x) = 2^x + x = 11.$$

Funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí na \mathbb{R} .

$$f(0) = 2^0 + 0 = 1$$

$$f(5) = 2^5 + 5 = 37$$

Podle ní $f(0) = 1 < 11 < 37 = f(5)$

a f je rostoucí, má rovnice

$$f(x) = 11$$

nepryře jědnu řeřeni $x_0 \in (0, 5)$.

Podle ní f je spojitá, tak podle věty o malých
měřích mezihodnot musí existovat.

Ze všeho, že tímto řeřením je $x_0 = 3$.

$$f(3) = 2^3 + 3 = 11.$$

Žádné jiné řešení neexistuje.

Glejně bychom mohli argumentovat u rovnice

$$2^x + x = 25$$

Ta musíme mít také právě jedno řešení $x_0 \in (1, 5)$, ale toto řešení neulevujeme.

$$2 \quad f(4) = 2^4 + 4 = 20$$

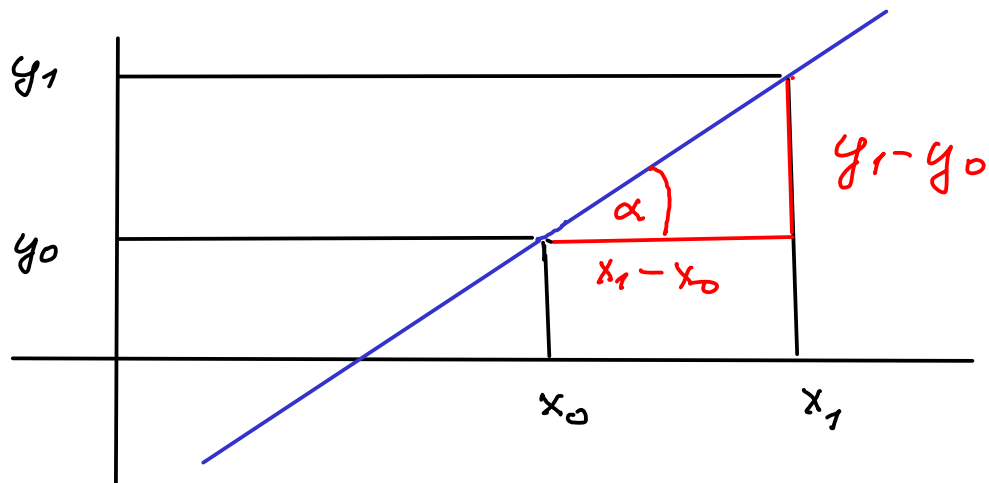
vidíme, že $x_0 \in (4, 5)$.

Derivace funkce

Připomeneme, co je směrnice přímky procházející body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$.

Je to podíl

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$



Definice derivace

Necht' $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \subseteq D(f)$ pro nějaké $x_0 \in D(f)$
a $\Delta > 0$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0
a značíme ji $f'(x_0)$.

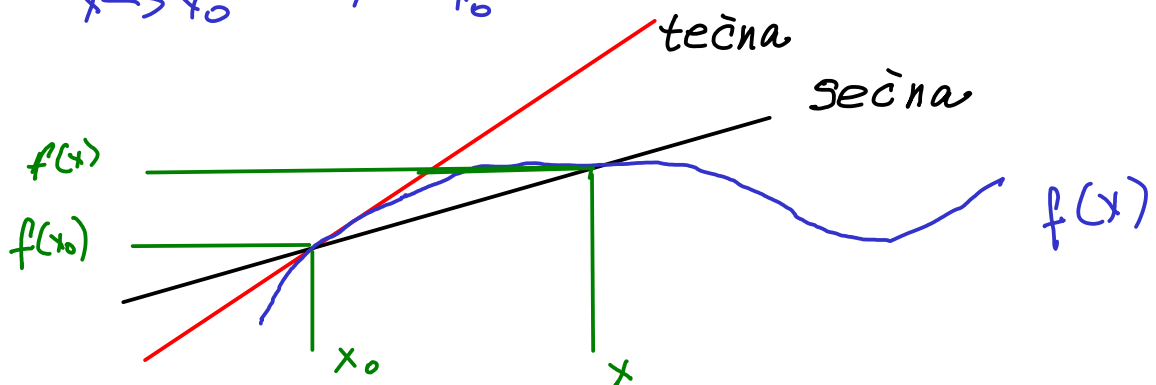
Geometrický význam derivace

Sečna grafu funkce f procházející body
 $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$ má směrnici

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Je-li x blíží k x_0 , pak se secny
blíží k přímce, kterou nazýváme
tečna grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$
a její směrnice je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



Funkce má v bodě x_0 nejmenší jednu derivaci.

Můžeme definovat derivaci слева

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a derivaci справа

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Často můžeme (zaměnou x za $x_0 + h$)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivace některých funkcí:

(1) konstantní funkce $f(x) = k$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(2) Lineární funkce $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

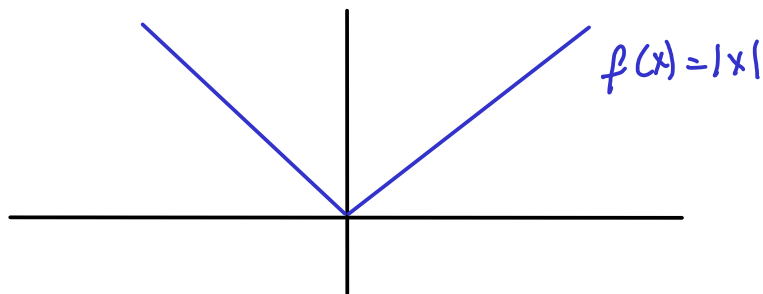
3) Absolutni hodnaka $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned} x_0 > 0 \quad f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 < 0 \quad f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x_0-h-(-x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1. \end{aligned}$$

$$x_0 = 0 \quad f'_+(x_0) = 1 \quad \text{ale} \quad f'_-(x_0) = -1$$

derivace v 0 neexistuje



4) $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

6) Pro $n \in \mathbb{Z}$ je derivace funkce $f(x) = x^n$ rovna

$$f'(x_0) = n x^{n-1}$$

Speciálně

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \frac{-4}{x^5}$$

7) Pro $f(x) = \sin x$ spočítáme $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x_0 + h - x_0}{2} \cos \frac{x_0 + h + x_0}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

8) Obdobně $(\cos x)' = -\sin x$.

9) Spočítáme derivaci funkce $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

10) Spočítáme derivaci funkce $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \\ &= \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Pravidla pro derivování

① Derivace součtu a rozdílu

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

② Derivace součinu

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

③ Derivace podílu: Necht' $g(x) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

4) Derivace složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5) Derivace inverzní funkce: necht' f je
poda' a ma' derivaci ruznou od nuly,
pak rovněž f^{-1} ma' derivaci a ta se rovná

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Geometrický význam: Směrnice tečny
k inverzní funkci je převrácena' hodnota
směrnice tečny k původní funkci.
(namalujte si obrátek.)

Ukažme si tato pravidla na příkladech:

2) Derivace součinu $f(x) = x$ $g(x) = x^3$

$$(f(x) \cdot g(x))' = (x^4)' = 4x^3$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$$

3) Derivace podílu $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{1 \cdot x^2 - x \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2}{x^4} = \frac{-1}{x^2}$$

4) Derivace složene' funkce
 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

$$(f(g(x)))' = (x^6)' = 6x^5$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot 3x^2 = 2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$$

5) Derivace inverzni' funkce
Vezmeme $f(x) = e^x$, potom $f^{-1}(x) = \ln x$.
Plati'

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{e'(y)}_{y=\ln x} = \frac{1}{e(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

Nové' výpočty podle pravidel

1) Derivace $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{ctg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$$\operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Analogicky $\operatorname{ctg}' x$.

2) Derivace cyklometrických funkcí

$\arcsin x$ je inverzní k $\sin x$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}}$$

$x \in [-1, 1]$, $y = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kde zde platí $\cos y \geq 0$ a tedy $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

Podud

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

O obdobně se spočítá, že

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Derivace $\operatorname{arctg} x$ je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}$$

Na intervalu $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Proto

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Analogicky

$$(\arccot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

3) Derivace funkce $f(x) = a^x$ je

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' \\ &= \ln a \cdot a^x\end{aligned}$$

4) Derivace funkce $f(x) = \log_a x$ je

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

Fyzikální význam derivace

x je čas, $f(x)$ je dráha bodu na přímce
za čas x . $f'(x)$ je okamžitá rychlost
v čase x .