

M1035

8. přednáška

Neurčitý integrál

Dodatek k diferenciálnímu počtu

Přijmeme si, co se jí diferenciál funkce f
v bodě x_0 . Je to lineární funkce, kterou
analyzujeme

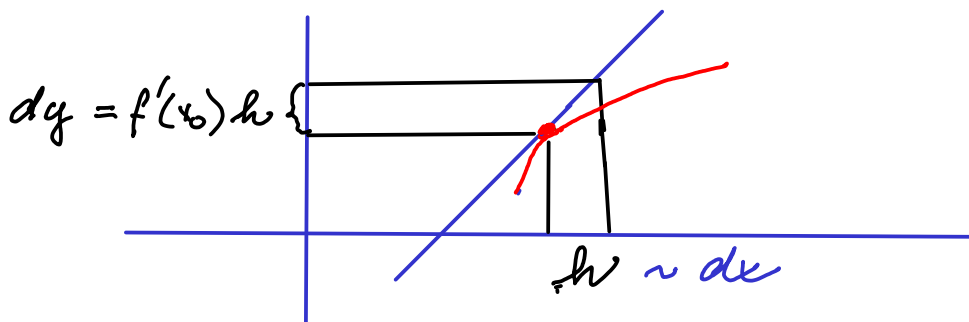
$$df(x_0)$$

a která přírůstek na ose x o velikosti

$$h = x - x_0$$

přibližně přibližný přírůstek ve směru osy y

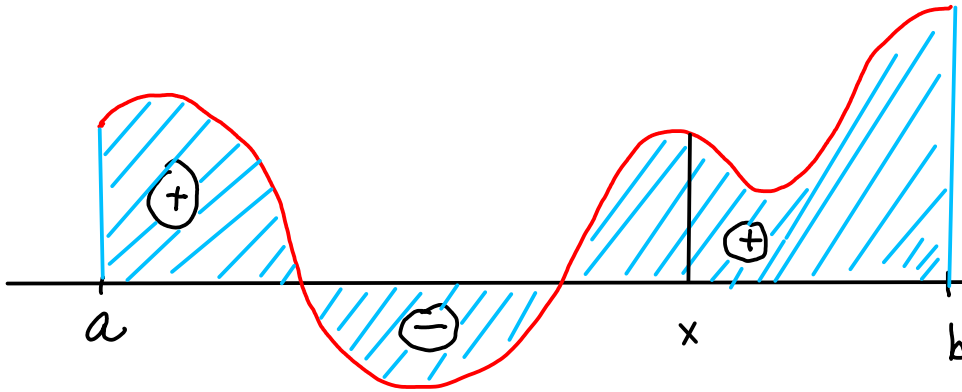
$$dy = df(x_0)(h) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx$$



Tento pojem bude hrát důležitou roli
v diferenciálním počtu více proměnných.

Integrální počet - motivace

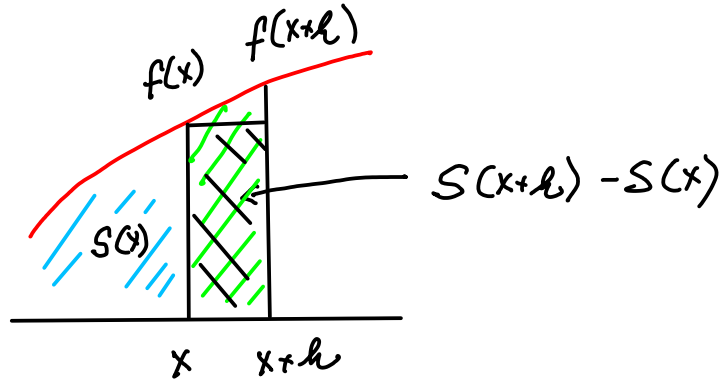
Chceme spočítat obsah plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x



Označme $S(x)$ obsah mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, x]$.

Spočítejme pro spojitou funkci f rozdíl

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \quad \text{pro malé } h$$



Rozdíl obsahů $S(x+h) - S(x)$ je přibližně obsah obdélníku o šířce h a výšce $f(x)$

$$S(x+h) - S(x) \sim h \cdot f(x)$$

Proba

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$$

a derivace funkce S je

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

Derivace funkce S je funkce f . Píkáme, že S je primitivní funkce k funkci f .

$$S'(x) = f(x)$$

nebo, že S je navíc i integrál funkce f .

Zepto

$$S(x) = \int f(x) dx.$$

Věta: Funkce F a G jsou dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu I , právě když

$$G(x) = F(x) - c$$

kde c je nějaké reálné číslo.

Jedliže $G'(x) = f(x) = F'(x)$. Pak

$$G'(x) - F'(x) = 0$$

a jediná funkce, která má na intervalu nulovou derivaci je konstantní funkce.

Pomocí primitivní funkce budeme počítat obsah plochy mezi grafem funkce f

a som x na intervalu $[a, b]$ kello :

$$\text{obsah plochy} = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Je-li $G(x) = F(x) + c$ jiná primitivní funkce,
dostaneme stejný výsledek

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Primitivní funkce k základním funkcím

① $\int 1 \cdot dx = x + c$

② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

③ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$

④ $\int \cos x dx = \sin x + c$

⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + c$

⑥ $\int e^x dx = e^x + c$

⑦ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

⑧ $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x + c$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

$$\textcircled{10} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$$

$$\textcircled{11} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\textcircled{12} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

Ť ma'mati e p'svedr'ime derivac'ni'm.
Nap'i

$$\begin{aligned} [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Pro p'imitivni' funkce plati' tako
sa'kladni' pravidla:

$$\textcircled{1} \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\textcircled{2} \int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$$

P'iklady

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} + 2\right) dx &= \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx \\ &+ \int 2 dx = \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x-1| + 2x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{9 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx$$

Derivace arktan (arc $\frac{x}{3}$)' = $\frac{\frac{1}{3}}{(\frac{x}{3})^2 + 1}$

tedy $\int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{9} \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1} d(\frac{x}{3}) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \int \frac{1}{x^2-9} dx &= \int \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x-3} - \frac{\frac{1}{6}}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \int \frac{x^4}{x^2+9} dx &= \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\textcircled{6} \quad \int \sin^2 x dx =$$

Použijeme vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$
 $= 1 - 2 \sin^2 x$

Odtud

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin 2x + c = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \\ &= \frac{1}{2} (1 - \sin x \cos x) + c \end{aligned}$$

Integrovaní metodou per partes

Věta: Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I , pak

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

Důkaz: Chceme dokázat, se prvními členy funkce

$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx$
je $u(x)v(x)$. K tomu stačí derivovat
načíná

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Příklady na integrování per partes

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx = \\ &= x \sin x - \int (x)' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

③ *Vicena' solve' parziali per partes*

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \quad \underline{\int e^x \sin x dx} &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) dx = \\ &= \underline{e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx}\end{aligned}$$

Oppad

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{5} \quad \int \arctg x dx &= \int 1 \cdot \arctg x dx = \\ &= x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{6} \quad \int x \ln x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

Substituční metoda integrace

Věta Necht' funkce f má na intervalu J primitivní funkci F . Necht' funkce $\varphi : I \rightarrow J$. Potom funkce $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$$

Čne prá't také' $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$.

Dva způsoby použití :

Ⓐ Máme spoítat integrál slovo a použijeme k tomu integrál upravo

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \lg x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = \int \frac{1}{t} dt = -\ln |t| + c = -\ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

$t = \cos x$

Ⓑ $\int \cos^3 x dx$. Předě $\cos x = (\sin x)'$, použijeme substituci $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int (1 - t^2) dt = \end{aligned}$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \ln x - \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

③ $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ podle $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, provedeme

substituci $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

④ $\int x \sqrt{1-x^2} dx$ podle $(1-x^2)' = -2x$
 a x se objevuje v integrálu, použijeme
 substituci

$$t = 1-x^2 \quad dt = -2x dx$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

⑤ Druhý způsob použití. Proměnou x
 a integrační funkci vyjádříme jako
 funkci nové proměnné z ,

$$x = \psi(z), \quad dx = \psi'(z) dz$$

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(z)) \psi'(z) dz$$

Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{Položíme } x = \sin z$$

$$dx = \cos z dz$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 z} \cos z dz = \int |\cos z| \cos z dz$$

$$x \in [-1, 1] \quad z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos z \geq 0$$

Proto $|\cos z| = \cos z$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 z dz = \int \frac{1 + \cos 2z}{2} dz$$

$$t = 2z \quad dt = 2dz \quad dz = \frac{dt}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2} dz + \frac{1}{2} \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} \sin t + C$$

$$= \frac{1}{2} (z + \sin z \cos z) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (z + \sin z \sqrt{1-\sin^2 z}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + C$$

$z = \arcsin x$

Tato primitivní funkce můžeme použít k výpočtu obsahu křivky a plochy 1.

Vypočteme obsah půlkruhu. Ta je obsah mezi grafem funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ a osou x na intervalu $[-1, 1]$, $F' = f$.

$$S = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = F(1) - F(-1) =$$

$$= \frac{1}{2} (\arcsin 1 + 1 \sqrt{1-1^2}) - \frac{1}{2} (\arcsin(-1) - 1 \sqrt{1-1^2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Obsah křivky je $\frac{\pi}{2}$.