M 1035 10. přednáška

Určitý integrál

Geometrické aplikace určitého integrálu

- výpočet obsahů
- výpočet objemu rotačních těles
- výpočet délky křivky

najdete na stranách 7 až 9 přípravy k přednášce 9.

Povrch pláště rotačního tělesa

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a,b]$. Uvažujme těleso, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x

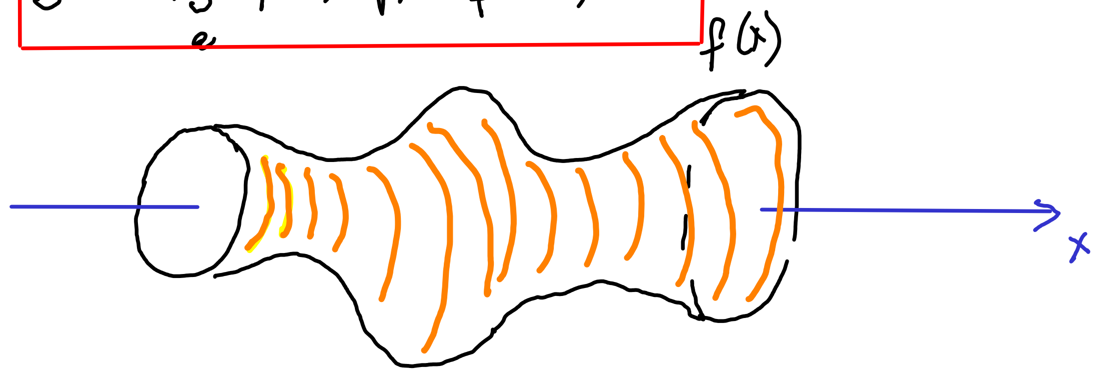
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a,b],\ y^2+z^2 \le f^2(x)\}$$

Jeho plášť je plocha

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a,b],\ y^2+z^2 = f^2(x)\}$$

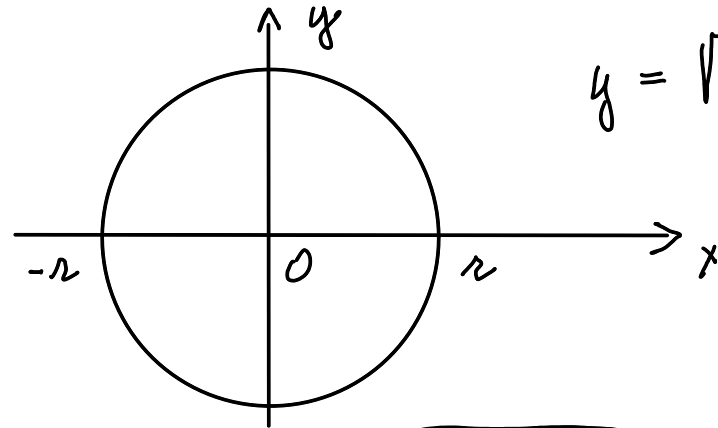
Povrch pláště spočítáme pomocí určitého integrálu takto:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$$



Příklad: spočítáme povrch koule o poloměru r

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$



$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)\right]^2} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} 1 \, dx$$

$$= 2\pi r \left[x \right]_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 .$$

Nevlastní integrály

Definice: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu (a,b) a má na něm primitivní funkci $F(x)$. Jestliže existují

$$\lim_{x\to a_+} F(x) \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x\to b_-} F(x) \in \mathbb{R}$$

definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Meze intervalu mohou být i $a=-\infty$ nebo $b=\infty$.
V tomto případě říkáme, že integrál konverguje.

Příklad 1 Nechť $\alpha \in (1,\infty)$. Potom

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

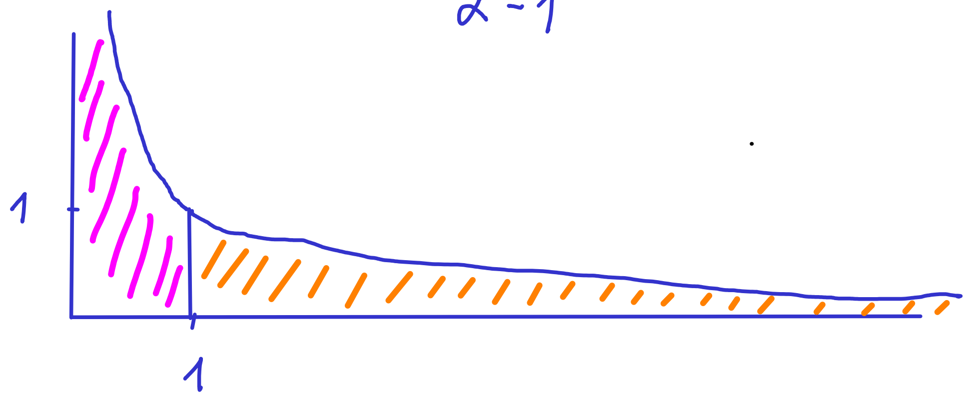
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Proto

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

Geometricky: obsah „nekonečné" plochy
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in[1,\infty),\ 0\le y\le \frac{1}{x^\alpha}\}$ je

konečný a rovná se $\dfrac{1}{\alpha-1}$.



Zkusme spočítat $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pro $x \in (1,\infty)$

Platí
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} - (-\infty) = \infty$$

Geometrický obsah růžové plochy je nekonečný. Říkáme, že integrál diverguje.

<u>Příklad 2</u> Konvergují integrály

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad a \quad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

Primitivní funkce je $\ln x$.

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

Proto integrály divergují

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty - 0 = \infty.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x\to -\infty} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty.$$

Příklad 3 (A) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty =$

$$= \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

(B) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} e^{-x} - (-e^0) =$

$$= 0 + 1 = 1.$$

(C) $\int_0^\infty \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\infty =$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos x - (-\cos 0)$$

$\lim_{x\to\infty} \cos x$ ale neexistuje, proto neexistuje ani integrál $\int_0^\infty \sin x\,dx$

(D) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ Primitivní funkce je

$F(x) = -2\sqrt{1-x}$ a platí $F(0) = -2$

$\lim_{x\to 1_-} F(x) = 0$. Proto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 0 - (-2) = 2.$$

(E) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Primitivní funkce je $\arcsin x$. Proto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{x\to 1-} \arcsin x - \arcsin 0$$
$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

Všimněte si, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je definovaná pouze na $(-1,1)$, zatímco primitivní funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ je definovaná na $[-1,1]$.

Příklad 4

Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_0^1 x \ln x\,dx$. Víme, že

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

Tedy funkce $x\ln x$ lze spojitě dodefinovat v 0, tedy integrál určitě konverguje.

Spočtěme to:

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 x \ln x\,dx \overset{\text{počítáme per partes}}{=}$$

$$= \lim_{a \to 0+} \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

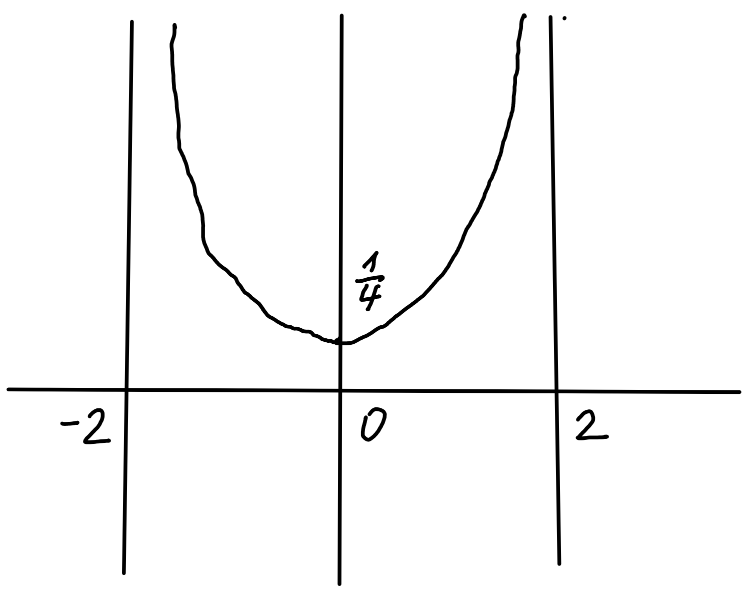
$$= \lim_{a \to 0+} \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_a^1 =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) - \lim_{a \to 0+} \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - 0 - 0 = -\frac{1}{4}$$

Příklad 5 Zjistěte zda konverguje

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{4 - x^2}\, dx$$



$$\int_0^2 \frac{dx}{4 - x^2} = \int_0^2 \left(\frac{\frac{1}{4}}{2 - x} + \frac{\frac{1}{4}}{2 + x} \right) dx =$$

$$= \lim_{a \to 2_-} \left[-\ln |2 - x| \right]_0^a + \left[\ln(2 + x) \right]_0^2 = \infty - \ln 2 + \ln 4 - \ln 2 = \infty$$

Obdobně dostaneme i $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{4-x^2} = \infty$.

Tedy integrál diverguje.