M 1035 11. přednáška

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice, kde v roli neznámé vystupuje funkce $y = y(x)$.

Příklady: ① $y' = y$

Řešením této rovnice jsou funkce $y(x) = ce^x$, kde c je libovolná konstanta. Skutečně platí

$$(ce^x)' = ce^x$$

Přidáme-li k rovnici počáteční podmínku

$$y(0) = 3$$

zjistíme, že této podmínce z výše uvedených funkcí vyhovuje pouze jediná, a to

$$y(x) = 3e^x$$

② $y'' + y = 0$

Této rovnici, kde y'' je druhá derivace neznámé funkce $y(x)$ vyhovují všechny funkce tvaru

$$y(x) = a \sin x + b \cos x$$

Skutečně $y''(x) = -a \sin x - b \cos x = -y(x)$. Abychom určili řešení jednoznačně, musíme zadat počáteční podmínku pro hodnotu v 0 a derivaci v 0, tj.

$$y(0) = 3 \qquad y'(0) = 4$$

$$y(0) = a \sin 0 + b \cos 0 = 3 \Rightarrow b = 3$$
$$y'(0) = a \cos 0 - b \sin 0 = 4 \Rightarrow a = 4$$

Rovnice (1) byla příkladem rovnice 1. stupně (vystupuje tam pouze 1. derivace), rovnice (2) příkladem rovnice 2. stupně.

Obecný tvar rovnice 1. stupně je

$$y' = f(x,y)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0$$

kde x_0 a y_0 jsou konkrétní reálná čísla.
Řešením je funkce $y = y(x)$, která splňuje rovnici, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 .$$

Jednoduchým příkladem je rovnice, kde pravá strana závisí pouze na x, tj.

$$\boxed{y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0}$$

V tomto případě je y funkce primitivní k funkci $f(x)$ takových funkcí je více, liší se o konstantu. My vybereme tu, která dává $y(x_0) = y_0$.
Lze ji napsat například pomocí určitého integrálu

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

tj.

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx .$$

Podívejme se další zvláštní případ

$$\boxed{y' = g(y) \qquad y(x_0) = y_0}$$

Předpokládejme, že na nějakém intervalu I, který obsahuje x_0, je $g(y(x)) \neq 0$. Potom

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = 1$$

Tedy funkce má primitivní funkci stejnou jako konstantní funkce 1

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int 1\,dx$$

Přepišme to pomocí určitého integrálu

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} 1\,dt$$

Nyní uděláme substituci $\quad y(t) = y$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = x - x_0$$

Nechť $G(y)$ je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{f(y)}$. Potom

$$G(y(x)) - G(y_0) = x - x_0$$

$$G(y(x)) = x - x_0 - G(y_0)$$

jestliže má G inverzní funkci, je

$$y(x) = G^{-1}(x - x_0 + G(y_0))$$

Vidíme, že

$$y(x_0) = G^{-1}(x_0 - x_0 + G(y_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0 .$$

Řešení tedy umíme spočítat, pokud známe primitivní funkci k $\frac{1}{g(y)}$ a její inverzní funkci.

Příklad $\boxed{y' = k \cdot y \qquad y(0) = 3}$

Řešíme

$$\frac{y'}{y} = k$$

$$\int_3^{y(x)} \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int_0^x k\, dt$$

$$\ln(y(x)) - \ln 3 = kx$$

$$\ln(y(x)) = kx + \ln 3$$

$$y(x) = e^{kx + \ln 3} = e^{\ln 3} \cdot e^{kx} = 3 \cdot e^{kx}$$

Vidíme, že $y(x) = 3e^{kx}$ je skutečně řešením naší diferenciální rovnice s danou počáteční podmínkou.

Příklad: $y' = xy \quad y(0) = 5$

Nechť na intervalu I, $0 \in I$, je $y(x) \neq 0$. Potom

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

Spočítáme primitivní funkce pro obě strany

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_0^x t\,dt$$

Vlevo provedeme substituci $y = y(t)$

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(y(x)) - \ln y_0 = \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(y(x)) = \frac{x^2}{2} + \ln y_0$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + \ln 5} = 5e^{\frac{x^2}{2}}$$

Derivováním se přesvědčíme, že

$$y' = x \cdot y$$

a dosazením $x = 0$ vidíme, že $y(0) = 5$.

Rovnice se separovanými proměnnými

jsou rovnice tvaru

$$y' = f(x)\, g(y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

Opět předpokládáme, že na intervalu I, kde $x_0 \in I$ je $g(y(x)) \neq 0$. Potom

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Místo x píšeme t a obě strany integrujeme od x_0 do x :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Vlevo provedeme substituci $y = y(t)$, $dy = y'(t)\,dt$. Dostaneme

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Nechť G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$. Nechť F je primitivní funkce k funkci $f(t)$. Potom

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

$$G(y(x)) = F(x) - F(x_0) + G(y_0)$$

Je-li G^{-1} inverzní funkce, je

$$y(x) = G^{-1}\left(F(x) - F(x_0) - G(y_0)\right)$$

Tato funkce je řešením naší diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Příklad: $\boxed{y' = \frac{1}{x}(4y-1)}$ $\quad y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$

Přepíšeme ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(4y-1)$$

Odtud plyne rovnost primitivních funkcí

$$\int \frac{dy}{4y-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln|4y-1| = \ln|x| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|4y-1| = 4(\ln|x| + C) \qquad C = \ln K$$

$$\ln|4y-1| = \ln x^4 \cdot K^4$$

$$|4y-1| = C^4 x^4$$

$$4y-1 = \pm C^4 x^4$$

$$y = \frac{L x^4}{4} + \frac{1}{4}$$

kde L je libovolné reálné číslo.

Příklad $\boxed{(x+1)\, y' = x y \qquad y(0) = y_0}$

Přepíšeme takto

$$(x+1) \frac{dy}{dx} = x y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x+1} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$\ln|y(x)| - \ln|y_0| = x - \ln|x+1|$$

$$\ln|y(x)| = x - \ln|x+1| + \ln|y_0|$$

$$|y(x)| = e^{x + \ln \frac{|y_0|}{|x+1|}}$$

$$|y(x)| = |y_0| \frac{e^x}{|x+1|}$$

Jsme na intervalu $(-1,\infty)$, neboť $x_0 = 0 \in (-1,\infty)$. Proto

$$y(x) = y_0 \frac{e^x}{x+1}$$

Poločas rozpadu: Radioaktivní uhlík je rozpadá podle diferenciální rovnice

$$N' = -\lambda N$$

Víme, že poločas rozpadu je 5568 let. Za jak dlouho se rozpadne 25% radioaktivního uhlíku.

Řešení dif. rovnice $N' = -\lambda N$, $N(0) = N_0$ je

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Poločas rozpadu je 5568 let. Tedy

$$N(5568) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \cdot 5568}$$

Odkud $$\frac{1}{2} = e^{\lambda \cdot (-5568)}$$

$$-\ln 2 = -5568 \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5568}$$

Hledaný čas t, za který se rozpadne čtvrtina látky je

$$\frac{3}{4} N_0 = N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 2}{5568} \cdot t}$$

Tedy $$\ln \frac{3}{4} = \frac{\ln 2}{5568} \cdot t$$

$$t = \frac{5568 \ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 2310 \text{ let}$$