M1035 1. přednáška

Budeme pracovat s množinami. Ty jsou určeny svými prvky.

Zápis: $x \in M$

Množiny zadáváme výčtem nebo pomocí vlastnosti jejich prvků.

Číselné množiny:

$\mathbb{N}$ přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ celá čísla, přidáme 0 $\quad 0 + n = n$
a $-n$ pro $n \in \mathbb{N}$ $\quad n + (-n) = 0$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Racionální čísla .... ve tvaru zlomků

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

přičemž

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}, \text{ jestliže } p \cdot b = q \cdot a$$

Reálná čísla .... doplnění rac. čísel a „čísla mezi nimi".
např. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Geometrické znázornění reálných čísel na přímce.

Operace s reálnými čísly

$+, \cdot, -, :$, prvky 0 a 1 s „výjimečným" postavením

Uspořádání reálných čísel

$$a < b$$

Počítání s nerovnostmi

Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.
Je-li $a < b$ a $c > 0$, pak $ac < bc$.
Je-li $a < b$ a $c < 0$, pak $ac > bc$.

Kartézský součin množin

$$A \times B = \{ [a, b] \mid a \in A, b \in B \}$$

$[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$, jestliže $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

Kart. součin $A \times A$ zapisujeme A^2
$(A \times A) \times A$ zapisujeme A^3

Dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$ (rovina)
Trojice reálných čísel $\mathbb{R}^3$ (prostor)

Podmnožina

$A \subseteq B$ jestliže $\underbrace{\forall a \in A}_{\text{pro všechna } a \in A}$ $a \in B$

$A \subset B$ jestliže $A \subseteq B$, ale $A \neq B$

Platí

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

<u>Intervaly</u> ... speciální podmnožiny v $\mathbb{R}$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$

analogicky $(a, b]$, $[a, b)$.

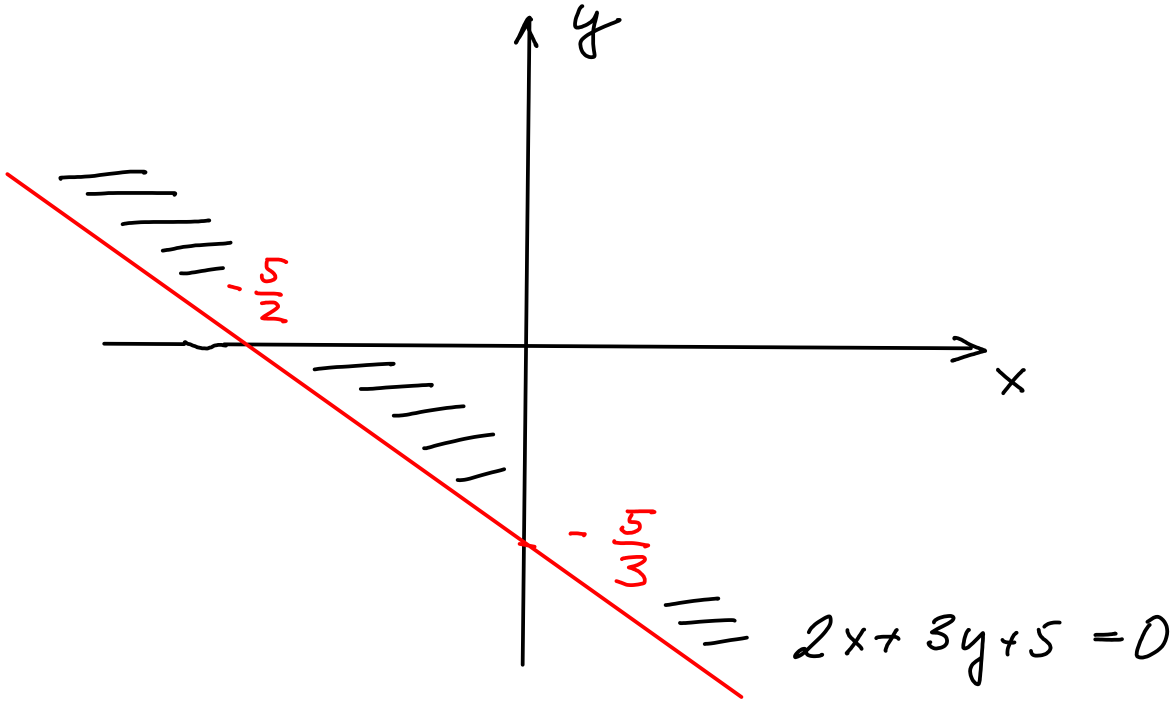
Intervaly $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$
(a, ∞) atd.

<u>PŘÍKLAD</u> Množina

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ ax + by + c = 0\}$$

kde $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$ a c jsou konstanty, popisuje přímku v rovině

$$2x + 3y + 5 = 0$$



Polorovinu nad přímkou můžeme zapsat takto:

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ;\ 2x + 3y + 5 \geq 0\}$$

Jestliže platí

$$2x + 3y + 5 = 0$$

lze y spočítat pomocí x :

$$3y = -2x - 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{5}{3}$$

To je příklad funkce.

FUNKCE Nechť $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkce $f : D \to \mathbb{R}$ přiřazuje každému číslu $x \in D$ právě jedno číslo $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

Množinu D nazýváme definiční obor funkce f. Značíme $D(f)$.

Množina

$$H(f) = \{ y \in \mathbb{R} ; \exists x \in D \; y = f(x) \}$$
$$= \{ f(x) \in \mathbb{R} ; x \in D \}$$

se nazývá obor hodnot funkce f.

Funkce může být zadána předpisem např.

$$f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

nebo, je-li D konečná, tabulkou: např. pro $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$

Graf funkce f je podmnožina v $\mathbb{R}^2$

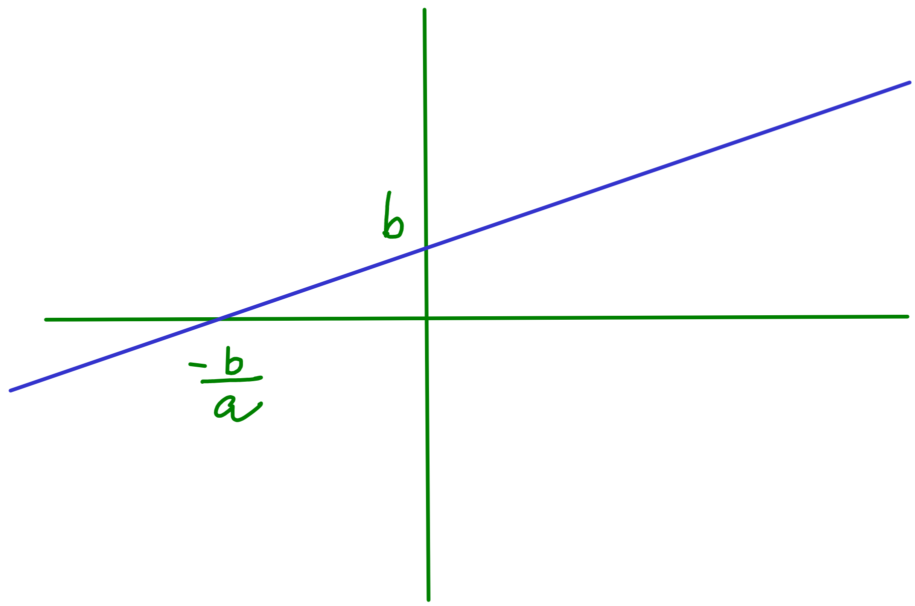
$$\{ [x, f(x)] \in \mathbb{R}^2 ; x \in D \}$$

LINEÁRNÍ FUNKCE

$f(x) = ax + b$

a, b konstanty

Grafem je přímka:



Je-li $a > 0$, je f rostoucí

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Skutečně, neboť

$$x_1 < x_2 \quad / \cdot a > 0$$
$$a x_1 < a x_2 \quad / + b$$
$$f(x_1) = ax_1 + b < a x_2 + b = f(x_2)$$

Pro $a < 0$ je f klesající

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Výpočet

$$x_1 < x_2 \quad / \cdot a < 0$$
$$ax_1 > ax_2 \quad / + b$$
$$f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$$

Prostá funkce : každé $y \in H(f)$ je obrazem pouze jediného $x \in D(f)$.

Totéž jinak : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Funkce rostoucí a klesající na svých def. oborech jsou prosté, ale obrácené to neplatí.

Skládání funkcí :

Nechť $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Jestliže

$$H(g) \subseteq D(f)$$

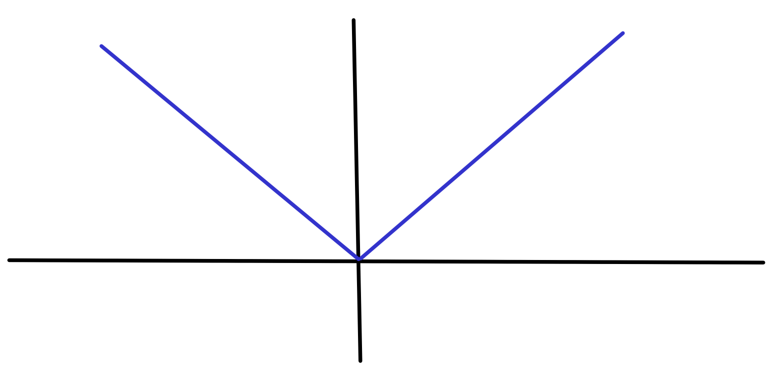
můžeme funkce f a g složit.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Absolutní hodnota reálného čísla

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Funkce $g(x) = |x|$ má graf



PŘÍKLAD

Vezměme $f(x) = ax + b$

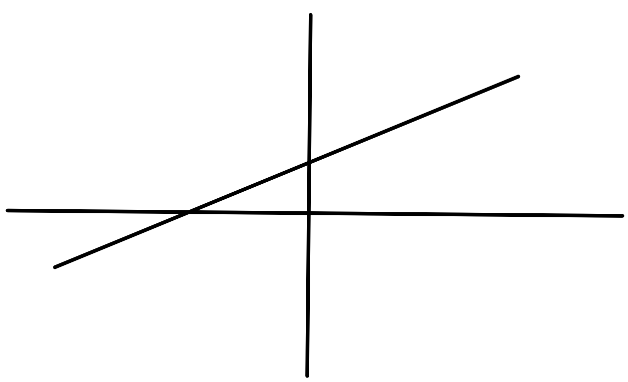
$g(x) = |x|$

Složená funkce $(f \circ g)(x) = a|x| + b$

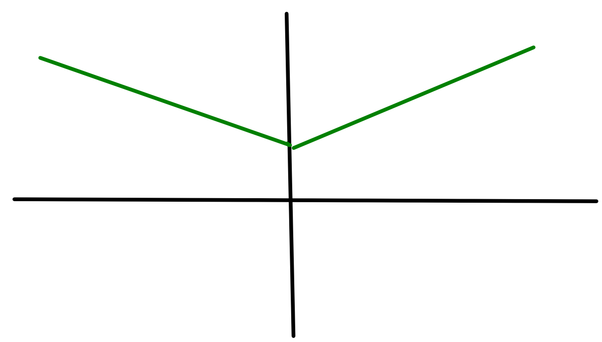
zatímco

$(g \circ f)(x) = |ax + b|$

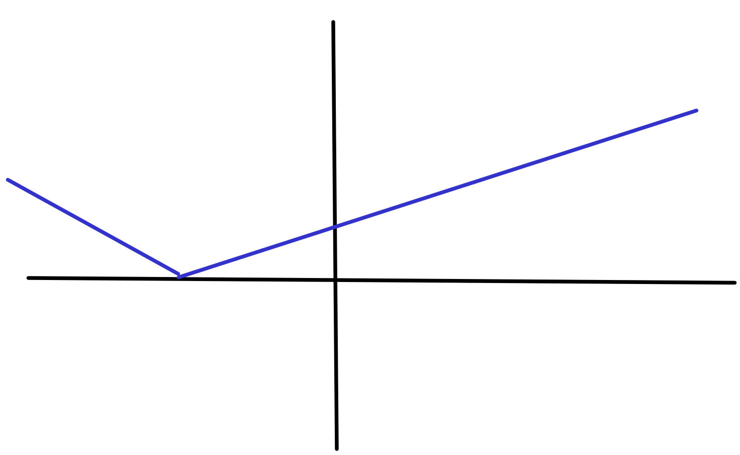
Graf $f(x) = ax + b$



Graf $(f \circ g)\, x = a|x| + b$



Graf $(g \circ f)(x) = |ax + b|$



Funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá **sudá**, jestliže

$\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = h(-x)$

$(f \circ g)(x) = a|x| + b$ je sudá funkce.

INVERZNÍ FUNKCE

Je-li funkce $f: D(f) \to \mathbb{R}$ prostá, pak existuje funkce inverzní k f, značíme ji

$$f^{-1}: H(f) \to \mathbb{R}$$

taková, že $f^{-1}(y) = x$ právě když $f(x) = y$.

Složení:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pro všechna } x \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pro všechna } y \in H(f)$$

Příklad: $f(x) = 2x - 3$

pak $f^{-1}(y)$ spočítáme takto:

$$y = 2x - 3$$

$$y + 3 = 2x$$

$$\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = x$$

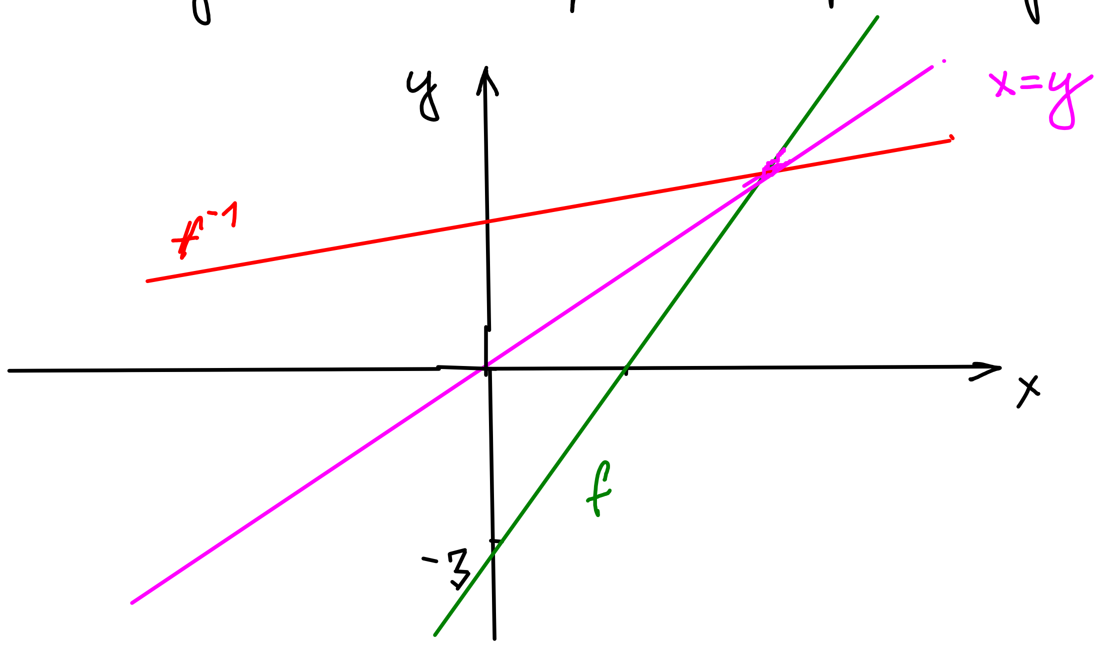
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Platí

$$(f^{-1}\circ f)(x) = \frac{1}{2}(2x-3) + \frac{3}{2} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = 2\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\right) - 3 = y$$

Graf f^{-1} vznikne z grafu f pomocí symetrie podle přímky $x = y$

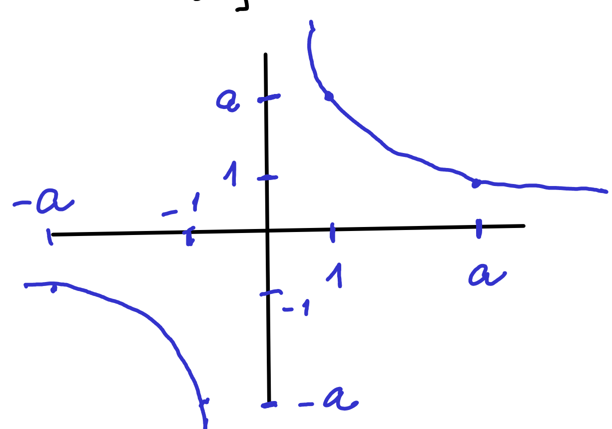


Příklad Nepřímá úměrnost

$$f(x) = \frac{a}{x} \qquad a > 0 \text{ konstanta}$$

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Grafem je hyperbola:



f je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, ale není klesající na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = D(f)$.

Ukažme pro $x_1 < x_2 < 0$.

Pak

$$-x_1 > -x_2 > 0 \quad \Big| \text{ převrácené čísla}$$

$$0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \quad \Big| \cdot a > 0$$

$$0 < -\frac{a}{x_1} < -\frac{a}{x_2}$$

$$\frac{a}{x_1} > \frac{a}{x_2}.$$

Ale pro $-1 < 1$, platí $f(-1) = -a < a = f(1)$.

Funkce f je lichá, tj. platí

$$f(x) = -f(-x)$$

neboť

$$-f(-x) = -\frac{a}{(-x)} = \frac{a}{x} = f(x)$$

Přestože f není klesající na svém definičním oboru, je prostá:

Jestliže

$$\frac{a}{x_1} = \frac{a}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Inverzní funkce k ní je $f^{-1}(y) = \dfrac{a}{y}$.

$$y = \frac{a}{x} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0$$

$$xy = a$$

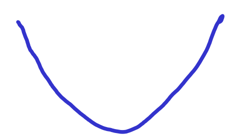
$$x = \frac{a}{y} = f^{-1}(y)$$

Kvadratická funkce

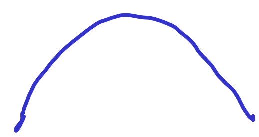
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Grafem je parabola

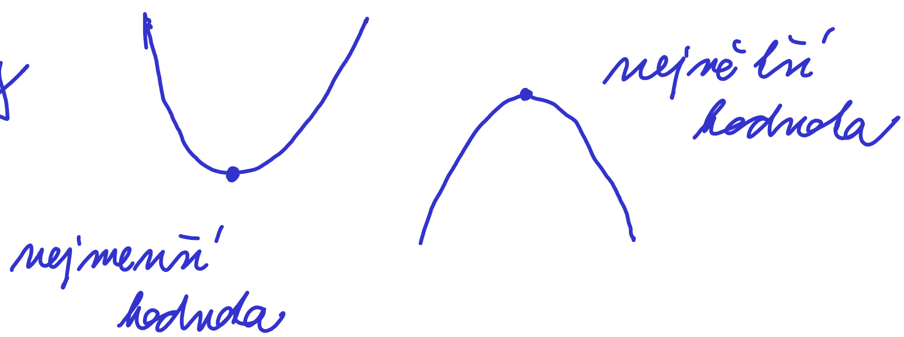
$a > 0$ „obrácená nahoru"



$a < 0$ „obrácená dolů"



Vrchol paraboly



Výpočet:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

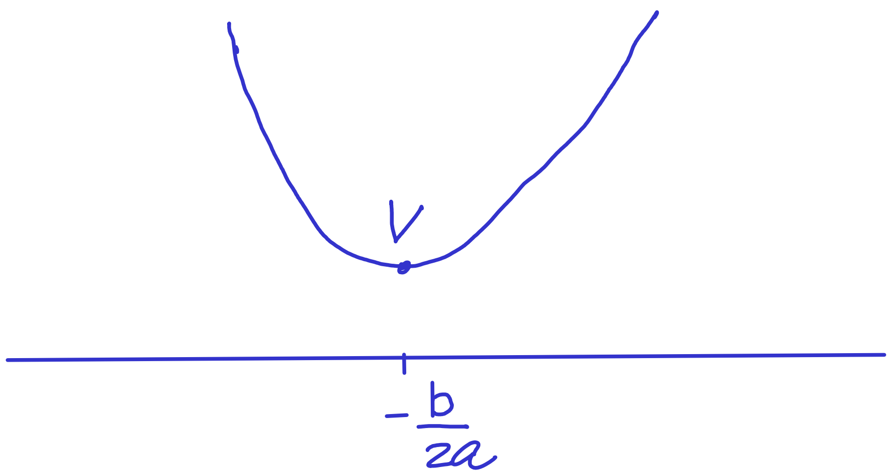
Použili jsme vzorec $(c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$

Vrchol je $V = \left[-\frac{b}{2a} , c - \frac{b^2}{4a} \right]$

Kvadratická funkce s $a > 0$

je klesající na $\left(-\infty , -\frac{b}{2a} \right)$

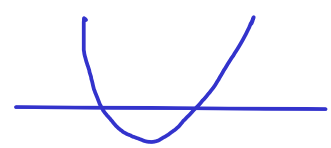
rostoucí na $\left(-\frac{b}{2a} , \infty \right)$



Je-li $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, má rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dva reálné kořeny, tj.

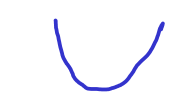


$$c - \frac{b^2}{4a} < 0 \qquad / \cdot (4a) > 0$$

$$4ac - b^2 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac > 0 \qquad \text{diskriminant}$$

Je-li $c - \frac{b^2}{4a} > 0$



nemá rovnice žádný reálný kořen.