M1035 2. přednáška

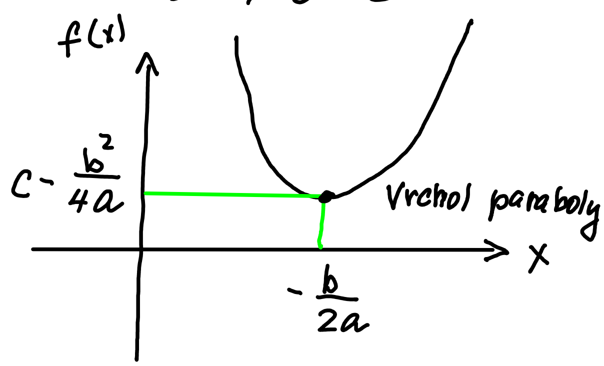
Polynomy a komplexní čísla

Minule jsme odvodili, že

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

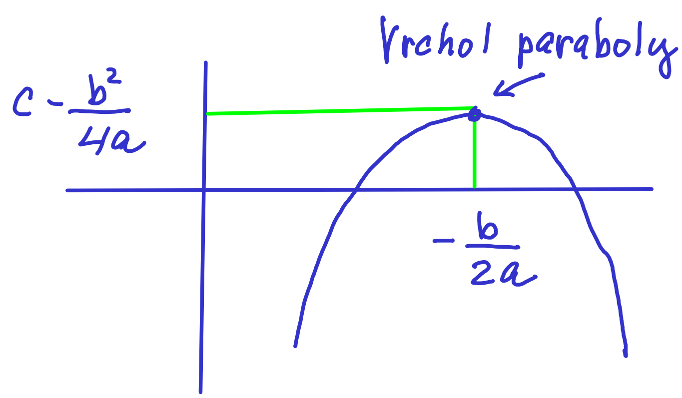
To nám pomohlo nakreslit graf funkce
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Pro $a > 0$



Obor hodnot je $\left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty\right)$

Pro $a < 0$



Obor hodnot je $\left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right]$

Pro $a > 0$ má rovnice $f(x) = 0$ dva reálné kořeny, právě když

$$c - \frac{b^2}{4a} < 0 \qquad \text{násobíme číslem } 4a > 0$$

$$4ac - b^2 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac > 0 \qquad \text{diskriminant je kladný}$$

Stejně tak pro $a < 0$: $f(x) = 0$ má dva kořeny právě když

$$c - \frac{b^2}{4a} > 0 \qquad \text{násobíme} \quad 4a < 0$$

$$4ac - b^2 < 0 \quad \text{tj} \quad D = b^2 - 4ac > 0.$$

Pro $D > 0$ jsou kořeny

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Platí

$$at^2 + bt + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$\boxed{\text{Příklad:}}$ Najděte kořeny kvadratického trojčlenu $x^2 + x - 6$.

Pomocí „vzorečku" $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Uhodneme $x^2 + x - 6 = (x - x_1)(x - x_2)$

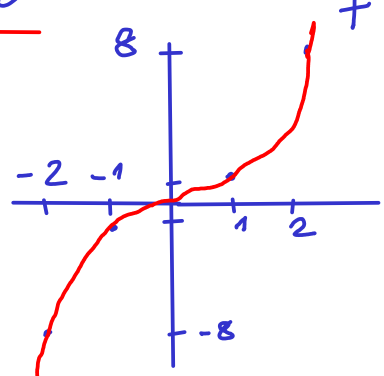
$$= x^2 + (-x_1 - x_2) + x_1 x_2$$

$$+x_1 + x_2 = -1 \qquad x_1 = 2, \ x_2 = -3$$

$$x_1 x_2 = -6$$

Třetí mocnina

$f(x) = x^3$



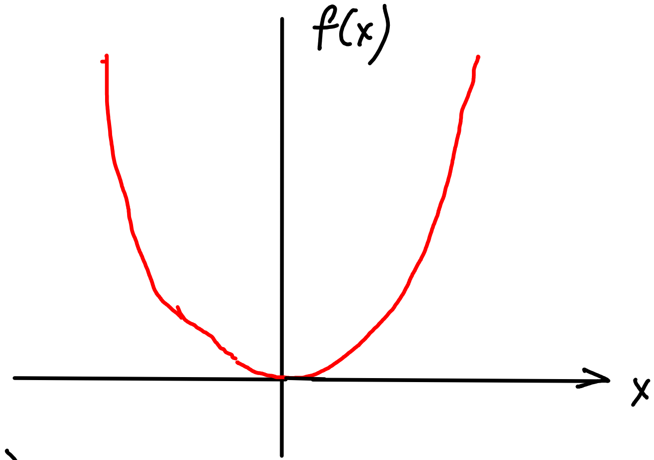
grafem je kubická parabola

$H(f) = \mathbb{R}$

rostoucí

lichá

Čtvrtá mocnina



$f(x) = x^4$

- $H(f) = [0, \infty)$
- klesající na $(-\infty, 0]$
- rostoucí na $[0, \infty)$
- sudá

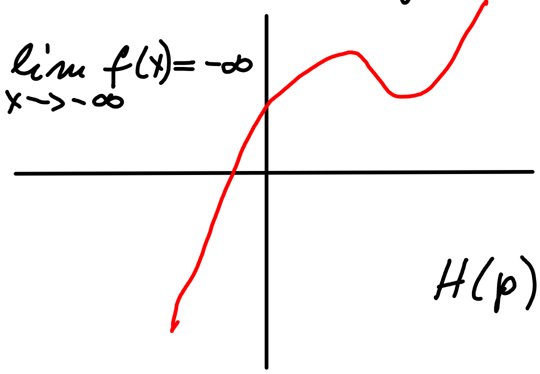
Obecné mocniny $f(x) = x^n$ pro n liché jsou rostoucí, prosté, liché.

Zatímco sudé mocniny jsou sudé s $H(f) = [0, \infty)$, klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$

Polynom stupně 3

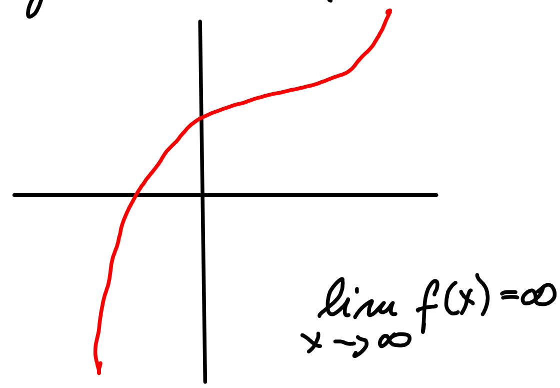
je funkce $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$.

Pro $a_3 > 0$ vypadá graf nějak takto:



nebo

$H(p) = \mathbb{R}$



Polynom stupně n, $n \geq 0$, je funkce

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kde $\boxed{a_n \neq 0}$

Kořen polynomu p je číslo x_0 takové, že

$$p(x_0) = 0$$

Platí: Číslo x_0 je kořenem polynomu stupně $n \geq 1$, právě když

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x),$$

kde q je polynom stupně $n-1$.

Pro polynomy stupně ≥ 5 neexistují obecné „vzorečky" pro výpočet kořenů. Pro polynomy stupně 3 a 4 sice existují, ale jsou nepraktické a nepoužívají se.

Kořeny lze někdy najít pomocí tohoto pravidla:

Nechť $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s celočíselnými koeficienty a_i. Jestliže má $p(x)$ za kořen racionální číslo

$$\frac{r}{s}, \quad r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N},$$

pak platí

(1) r dělí koeficient a_0

2) s dělí koeficient a_n

Příklad Najděte kořeny polynomu

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 15$$

Zkusíme najít racionální kořen $\frac{r}{s}$
Platí s dělí $a_3 = 1$, tj. $s = 1$.
Dále r dělí $a_0 = 15$, tedy r hledáme mezi čísly

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Použijeme tzv. Hornerovo schéma

x	1	4	-2	15
1	1	5	3	$-12 = p(1)$
3	1	7	19	$42 = p(3)$
-3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{-5}$	$0 = p(-3)$

Tedy číslo $x_1 = -3$ je kořen a platí

$$p(x) = (x-(-3))\,(\underline{1}\cdot x^2 + \underline{1}\cdot x \ \underline{-5})$$

Nyní najdeme kořeny kvadratického trojčlenu $x^2 + x - 5$ a ty jsou

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Kvadratická rovnice
$$x^2 + 1 = 0$$
nemá v reálných číslech řešení. Proto byla snaha „rozšířit" reálná čísla tak, aby

1) rovnice $x^2+1=0$ měla v tomto rozšíření kořen,
2) aby v tomto rozšíření šlo násobit a sčítat podle stejných pravidel jako v oboru reálných čísel.

Tomuto rozšíření reálných čísel říkáme **komplexní čísla**, jejich množinu označujeme $\mathbb{C}$

1) vezmeme „imaginární kořen" rovnice $x^2=-1$ a označíme ho i, tj
$$i^2 = i \cdot i = -1$$

2) vezmeme všechny jeho reálné násobky
$$a \cdot i \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$
S nimi počítáme takto
$$a \cdot i + b \cdot i = (a+b) \cdot i$$
$$(a \cdot i) \cdot (b \cdot i) = (a \cdot b) \cdot (i \cdot i) = (a \cdot b)(-1) = -a \cdot b$$

3) dále vezmeme všechny součty
$$a + b \cdot i \quad , \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}$$

S nimi počítáme takto:

$$(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= a\cdot c+a\cdot di+b\cdot i\cdot c+b\cdot i\cdot d\cdot i\\ &= a\cdot c+(b\cdot d)\underbrace{(i\cdot i)}_{-1}+(ad+bc)i\\ &= (a\cdot c-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

4) Reálná čísla píšeme ve tvaru

$$a = a+0\cdot i$$

Platí

$$(a+bi)+0 = a+bi$$
$$(a+bi)\cdot 1 = a+bi$$

Dále

$$(-i)\cdot(-i)=((-1)i)\cdot((-1)i)=(-1)^2 i^2=1\cdot(-1)=-1$$

Tedy rovnice $x^2+1=0$ má kořen nejen i, ale také $-i$.

Tj.

$$(x-i)(x+i)=x^2+ix-ix+(-i)(i)=x^2+1.$$

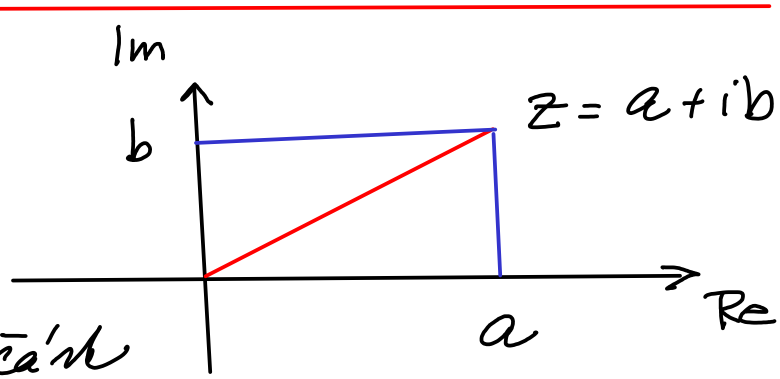
Znázornění komplexních čísel v rovině

$z = a+bi$

$a, b \in \mathbb{R}$

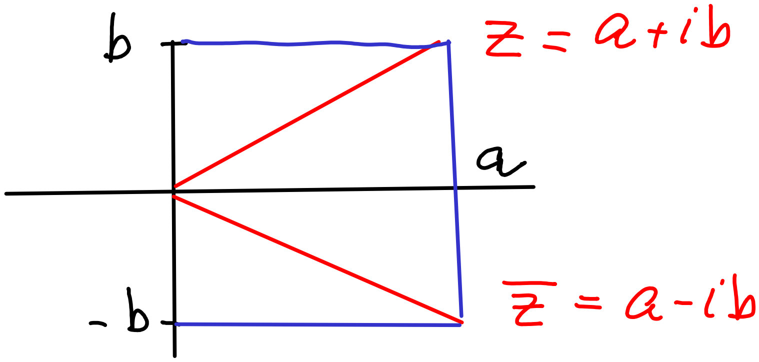
a reálná část

b imaginární část



Komplexně sdružené číslo

k číslu $z = a+ib$ je číslo $\bar{z} = a-ib$



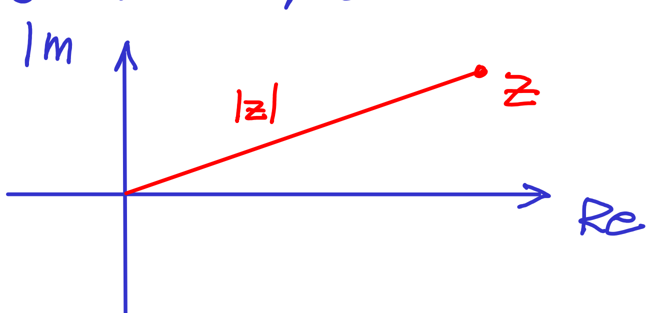
Platí

$$z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a \in \mathbb{R}$$

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(b)(-b)+(ab-ab)i$$
$$= a^2+b^2 \in \mathbb{R}$$

Absolutní hodnota komplexního čísla

- geometricky: vzdálenost bodu $z = a+bi$ v rovině od počátku



- početně $\quad |z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

Porovnáme se součinem $z\cdot\bar{z}$ a dostaneme

$$\boxed{|z|^2 = z\cdot\bar{z}}$$

Převrácené číslo ke komplexnímu číslu $z = a + ib \neq 0$

Příklad: Spočítáme

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} =$$

$$= \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

Obecně

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Pomocí komplexně sdruženého čísla a absolutní hodnoty

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Základní věta algebry

Každý polynom stupně $n \geq 1$ má právě n komplexních kořenů, tj. existují komplexní čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, že

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Některé kořeny mohou být stejné, v takovém případě mluvíme o vícenásobném kořenu.

Příklad Polynom

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + x + 5 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 5) =$$

$$= (x - i)(x + i)(x^2 + x + 5) = (x - i)(x + i)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{19}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$$

Kvadratický trojčlen $x^2 + x + 5$ má kořeny

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{|D|}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$$

Je-li $p(x)$ polynom s reálnými koeficienty, který má komplexní kořen $z \notin \mathbb{R}$. Pak i číslo komplexně sdružené $\bar{z}$ je kořenem polynomu $p(x)$.

Příklad: Nechť $p(x) = x^2 + x + 5$

Ten má kořeny

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{19}}{2} \qquad \bar{z} = \frac{-1 - i\sqrt{19}}{2}$$

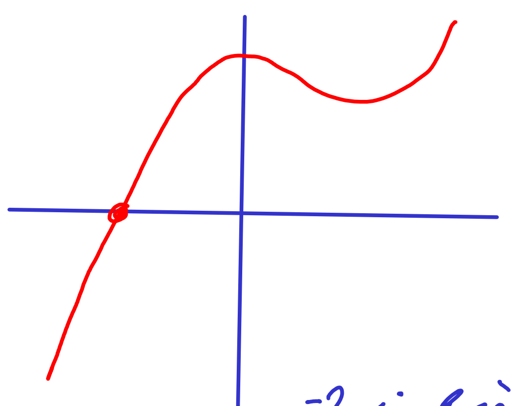
$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - \underbrace{(z+\bar{z})}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{\in \mathbb{R}}$$

Každý polynom stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty můžeme napsat jako součin kvadratických a lineárních polynomů.

$\boxed{\text{Příklad}}$ Polynom

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$$

musí mít reálný kořen, neboť jeho graf protne osu x



Hledáme mezi děliteli čísla 10

x	1	3	7	10
-2	1	1	5	0

-2 je kořen

$$p(x) = (x+2)\underbrace{(x^2 + x + 5)}_{}$$

nelze rozložit na součin reálných lineárních polynomů, neboť má komplexní kořeny.