M1035 – 3. přednáška

Racionální lomené funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P, Q \text{ polynomy}$$

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R},\ Q(x) \neq 0 \}$$

Zjednodušení rac. lomené funkce

(1) st $P \geq$ st Q, pak $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

lze psát ve tvaru

$$f(x) = D(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}$$

D, Z, Q polynomy   st D = st P − st Q

st Z < st Q

D je částečný podíl polynomů $P : Q$

Z je zbytek v tomto dělení

Příklad 1 $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 4}$

$$(x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3) : (x^2 + 2x + 4) = \underbrace{x^2 - 10x + 18}_{D(x)}$$

částečný podíl

$$
\begin{aligned}
&-(x^4 + 2x^3 + 4x^2) \\
&\quad -10x^3 - 2x^2 - 3 \\
&\quad -(-10x^3 - 20x^2 - 40x) \\
&\qquad 18x^2 + 40x - 3 \\
&\qquad -(18x^2 + 36x + 72) \\
&\qquad\qquad \underbrace{4x - 75}_{Z}
\end{aligned}
$$

zbytek

$$f(x) = x^2 - 10x + 18 + \frac{4x - 75}{x^2 + 2x + 4}$$

② $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ st P < st Q

Pak lze Q rozložit na součin lineárních a kvadr. polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$

$$Q(x) = (x+2)^2(x^2+x+5)^2$$

→ nemá reálné kořeny

$D = 1 - 4\cdot 1\cdot 5 = -19 < 0$

V tomto případě lze $f(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+5} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+5)^2}$$

Koeficienty $A, B, \dots, F$ lze spočítat tak, že pravou stranu převedeme na spol. jmenovatele a vzniklý čitatel se musí rovnat polynomu $P(x)$. Tím porovnáme $A, B, \dots F$ dostaneme soustavu rovnic a tu vyřešíme.

<u>Příklad 2</u> $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x+2)^2}$ $= P(x)$, $= Q(x)$

Rozklad na parciální zlomky

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax + (2A+B)}{(x+2)^2}$$

$$3x+1 = Ax + (2A+B)$$

$$3 = A$$

$$1 = 2A+B \qquad 1 = 2\cdot 3 + B \quad B = -5$$

$$\frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2)-5}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3x+6-5}{(x+2)^2} = \frac{3x+1}{(x+2)^2}$$

$$\frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Příklad 3

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x^2+1)}{(x+2)(x^2+1)} + \frac{(x+2)(Bx+C)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x+2)(Bx+C)}{(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+2)(x^2+1)}$$

(1) $A+B=2$

(2) $2B+C=-3 \Rightarrow C=-3-2B$

(3) $A+2C=1$

(1) $A+B=2$

($\bar{3}$) $A+2(-3-2B)=1$

$A+B=2$

$A-4B=1+6=7$

$-3-2(-1)$

(1) $\quad A + B = 2$

(2) $\quad A - 4B = 7$

Od 1. rovnice odečteme 2. rovnici (2)

$$A + B - (A - 4B) = 2 - 7$$
$$5B = -5$$
$$B = -1$$

$A + B = 2 \Rightarrow \quad A = 3$

$C = -1$

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

Mocniny a mocninné funkce

① Umocňování přirozeným číslem $n \in N$

$r \in R$, $n \in N$

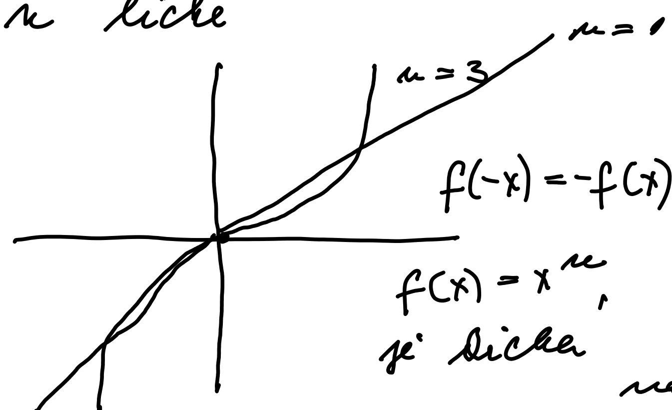
$$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ krát}}$$

$$r^1 = r$$

Dále definujeme, že $r^0 = 1$.

Mocninné funkce $\quad f(x) = x^n$

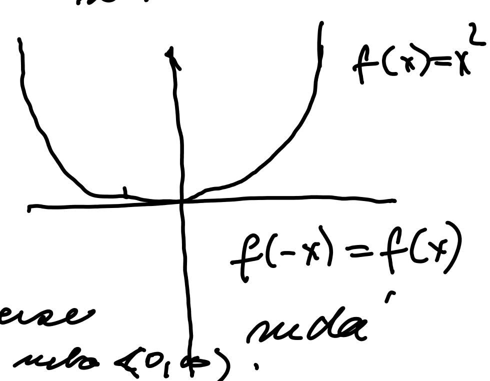
n liché



$f(-x) = -f(x)$

$f(x) = x^n$, je lichá

n sudé



$f(-x) = f(x)$

sudá

Inverse na $(-\infty, 0]$ nebo $[0, \infty)$.

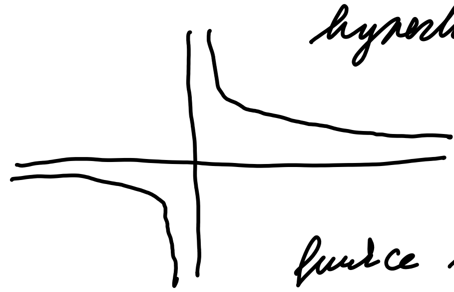
② x^n pro $n \in \mathbb{N} \cup$ záp.

$n \in \mathbb{N}$

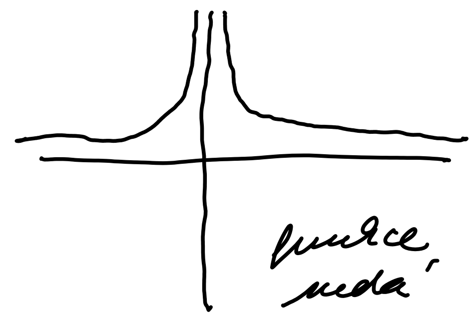
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x \neq 0$$

$n = 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $n = 2$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$

hyperbola



funkce lichá



funkce sudá

Pravidla pro počítání s mocninami

- $v^{a+b} = v^a \cdot v^b$
- $(u \cdot v)^a = u^a \cdot v^a$
- $(u^a)^b = u^{a \cdot b}$
- $1^a = 1$

③ Umocňování rac. číslem

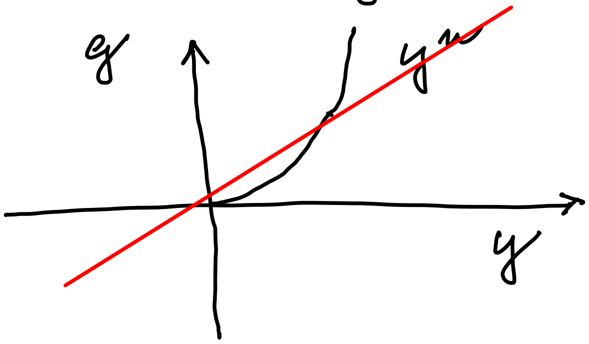
pouze pro $v \in (0, \infty)$

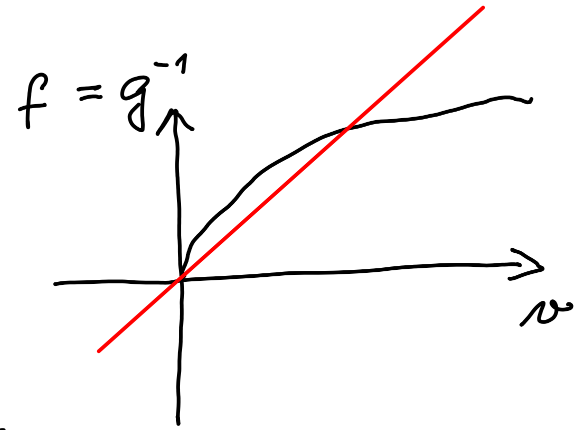
$n \in \mathbb{N}$

$v^{\frac{1}{n}}$ je číslo y takové, že

$$y^n = v$$

funkce $f(v) = v^{\frac{1}{n}}$ je inverzní k funkci $g(y) = y^n$





Graf f je symetrický s grafem g podle osy 1. kvadrantu

$v^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ $\frac{r}{n}$ lib. rac. čísla

$v > 0$ $\qquad$ $v^{\frac{r}{n}} = \left(v^{\frac{1}{n}}\right)^r$ $\qquad$ $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Toto umocňování respektuje pravidla

- $u^{a+b} = u^a \cdot u^b$
- $(u \cdot v)^a = u^a \cdot v^a$ $\qquad$ $a, b \in \mathbb{Q}$ rac. čísla
- $(u^a)^b = u^{a \cdot b}$
- $1^a = 1$

(4) Tuto definici lze rozšířit i na iracionální čísla

Intuitivně $\qquad$ a iracionální číslo

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < a < b_n \dots < b_2 < b_1$$

a_i, b_i rac. čísla

Platí, že $v^{a_1} < v^{a_2} < \dots \quad < v^{b_2} < v^{b_1}$

Čísla v^{a_i} se blíží k nějakému číslu, v^{b_i} se blíží ke stejnému číslu. Definujeme, že tato čísla je mocninou v^a.

Pro reálné mocniny platí stejná pravidla jako pro rac. mocniny.

Definovali jsme v^a pro $v \in (0,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

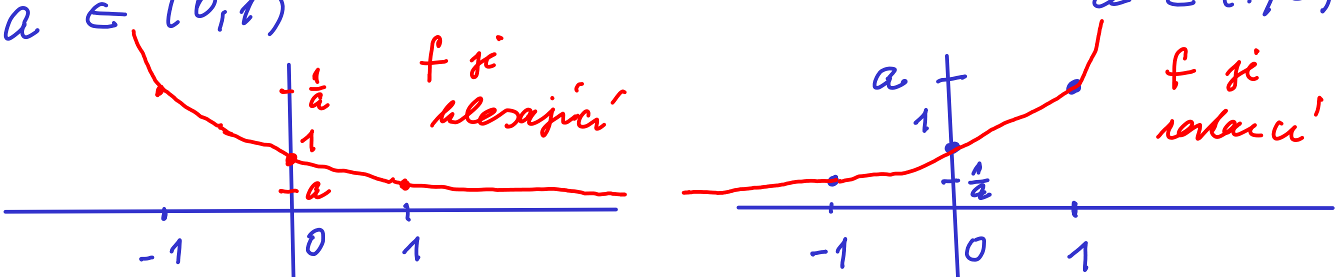
Exponenciální funkce

Nechť $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ je pevně zvoleno. Exponenciální funkce

$$f(x) = a^x \qquad f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (0,\infty)$$

$a \in (0,1)$ $\qquad\qquad$ $a \in (1,\infty)$



Graf ... exponenciála

$a > 1$ pro x dost. velké je

$$a^x > x^n$$

Exponenciální funkce je prostá. Nemá smysl mluvit o funkci $1^x \equiv 1$.

Logaritmické funkce

jsou inverzní k příslušným exponenciální funkcím

$$\log_a : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} = H(\log_a)$$

definovaná pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

$x > 0$

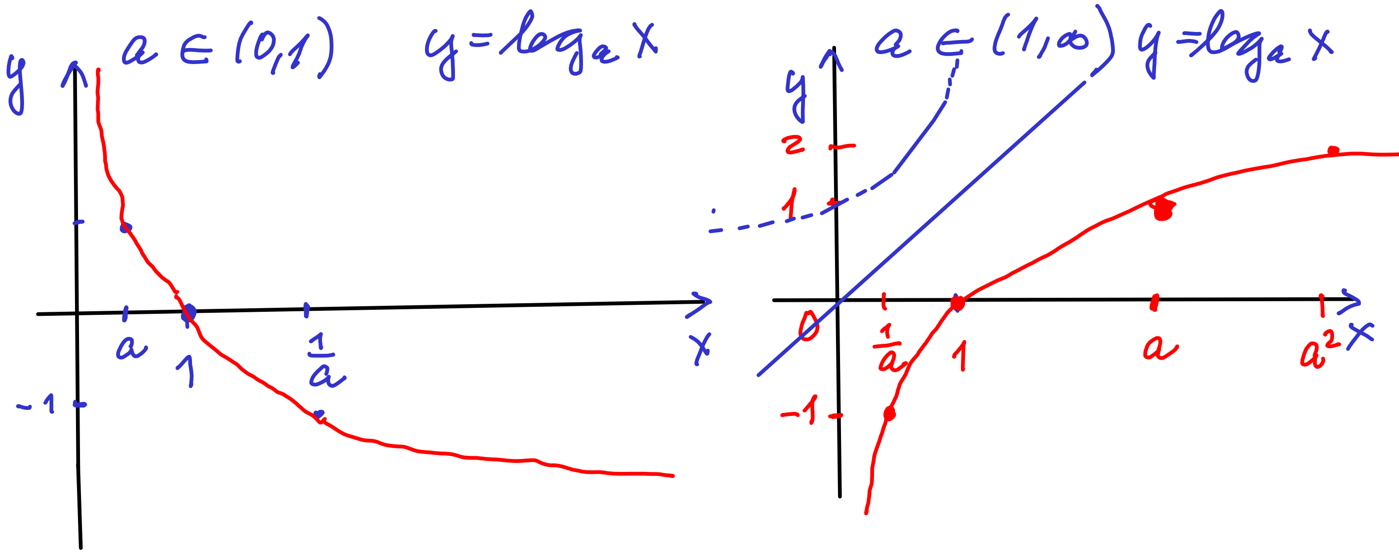
$\log_a x$ je exponent, kterým musíme umocnit a, abychom dostali x.

$$\log_a x = y \text{ znamená } a^y = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Tedy $\log_a$ je inverzní funkce k funkci $g(x) = x^a$.

Grafy exponenciální funkce



Pravidla pro počítání s logaritmy

$x, y \in (0, \infty)$

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(2a) $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$

(3) $\log_a x^b = b \log_a x$

(4) $\log_a 1 = 0$

(5) $\log_a a = 1$

(6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Odvození (1) z pravidel pro násobení s mocninami:

Chceme ukázat, že $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\underline{a^{\log_a x + \log_a y}} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} =$$

$$= x y = \underline{a^{\log_a (x \cdot y)}}$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a (x \cdot y)}$$

Funkce $f(z) = a^z$ je prostá, proto

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

<u>Příklad 4</u> Řešte následující rovnici

$$\frac{\log_{10} (35 - x^3)}{\log_{10} (5 - x)} = 3$$

Musí být $35 - x^3 > 0$ $\quad x \in (-\infty, \sqrt[3]{35})$

$$3 < \sqrt[3]{35} < 4$$

Dále $5 - x > 0$ $\quad x \in (-\infty, 5)$

Dále $\log_{10}(5-x) \neq 0$ $\quad 5 - x \neq 1$

$$x \neq 4$$

ale to je v intervalu $(-\infty, \sqrt[3]{35})$ splněno.

Rovnici upravíme jmenovatelem pravé strany

$$\log_{10}(35 - x^3) = 3 \cdot \log_{10}(5-x)$$

$$\log_{10}(35 - x^3) = \log_{10}(5-x)^3$$

$f(z) = \log_{10} z$ je prostá funkce, proto

$$35 - x^3 = (5-x)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$35 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Řešení rovnice je $x = 2$ nebo 3.

Dekadický logaritmus je log při základu 10

Definice pH je

$$pH = -\log_{10}(c_{H_3O^+})$$

$c_{H_3O^+}$ je koncentrace kationtu H_3O^+

v roztoku.

Ve vodě za norm. podmínek je

$$c_{H_3O^+} = 10^{-7}$$

$$pH = -\log_{10}(10^{-7}) = -(-7) = 7$$

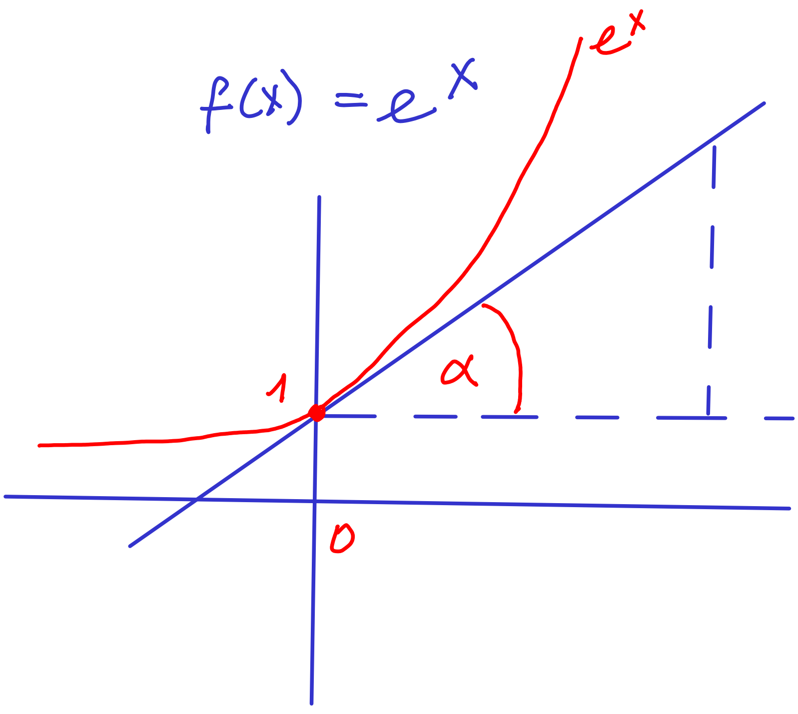
Platí, že součin $c_{H_3O^+}$ a c_{OH^-} je 10^{-14}

Kyseliny $pH < 7$, zásady $pH > 7$.

Přirozený logaritmus má základ tzv. Eulerovo číslo

$e \doteq 2{,}718\,281\,284\ldots$ irac. číslo

$f(x) = e^x$



tečna ke grafu v bodě $(0,1)$ má směrnici $\operatorname{tg}\alpha = 1$, tj. $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$