

9. cvičení z M1035, podzim 2021

Na pondělním cvičení jsme udělali z příkladu 1 a 2 úlohy označené velkými písmeny. Ty další z těchto dvou by si měli studenti počítat sami. Příklady 3 a 4 jsme nestihli.

Příklad 1. Spočítejte limity podle l'Hospitalova pravidla:

- A) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$,
- B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$,
- C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{4 - 4 e^x}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$,

Příklad 2. Derivujte následující funkce, vyšetřete jejich průběh (tj. spočítejte limity v krajních bodech definičních intervalů, zjistěte, kde je funkce rostoucí a kde klesající, v kterých bodech má lokální extrém a které z nich jsou globální) a načrtněte graf:

- A) $f(x) = \arctan \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$,
- B) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$
- C) $f(x) = x^2 \ln x$,
- D) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 40x$,
- e) $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$
- f) $f(x) = \arctan \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$
- g) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$,
- h) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$,
- i) $f(x) = \ln^2 x$,

Příklad 3. V čisté vodě platí vztah pro iontový součin vody K_w (je konstantní pro dané podmínky)

$$K_w = [H^+] \cdot [OH^-],$$

kde $[H^+]$ je koncentrace vodíkových kationtů a $[OH^-]$ je koncentrace hydroxydových aniontů. Určete funkci $[H^+] + [OH^-]$ v závislosti na $[H^+]$ a stanovte minimum této funkce.

Příklad 4. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0 : (Je potřeba říci jak, na přednášce to ještě nebylo.)

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x_0 = 1.$

b) $f(x) = x^2 - x + 1, x_0 = 3.$