

C. Písemka v semestru z M1035, prosinec 2021

Příklad 1. [3 body] Uvažujme funkci $f(x) = |x - 2| - |2x + 3| + 1$.

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci f jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce f na intervalu $[-5, 5]$. [1 bod]

Řešení. Na $(-\infty, -3/2]$ je $f(x) = x + 6$, na $[-3/2, 2]$ je $f(x) = -3x$, na $[2, \infty)$ je $f(x) = -x - 4$. Graf funkce na intervalu $[-5, 5]$ dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> plot $|x-2|-|2x+3|+1$ from -5 to 5

□

Příklad 2. [3 body] Racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{2x^4 - x^3 - 4x^2 - 22x + 1}{x^3 - x^2 - 4x - 6}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a parciálních zlomků.

Řešení.

$$R(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 3} + \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

□

Příklad 3. [3 body] Uvažujme funkci

$$f(x) = \log_2(2 - 3x).$$

- Napište její definiční obor, obor hodnot a její hodnotu ve třech bodech a načrtněte její graf na vhodně velkém intervalu. [1 bod]
- Najděte k funkci $f(x)$ inverzní funkci $g(y)$, napište její předpis, definiční obor a obor hodnot a spočítejte složenou funkci $f(g(y))$. [2 body]

Řešení. a) $D(f) = (-\infty, 2/3)$, $H(f) = (-\infty, \infty)$, $f(1/3) = 0$, $f(0) = 1$, $f(-2/3) = 2$.
Její graf na intervalu $[0, 9]$ najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li plot $\log_2(2 - 3x)$ from -5 to 1

b) Inverzní funkce je $x = g(y)$ s definičním oborem $D(g) = (-\infty, \infty)$ a oborem hodnot $H(g) = (-\infty, 2/3)$ spočítáme takto: pro $y \in (-\infty, \infty)$ řešíme rovnici

$$\begin{aligned}\log_2(2 - 3x) &= y \\ 2^{\log_2(2 - 3x)} &= 2^y \\ 2 - 3x &= 2^y \\ 3x &= 2 - 2^y \\ x &= \frac{1}{3}(2 - 2^y) = \frac{2}{3}(1 - 2^{y-1}).\end{aligned}$$

Tedy $g(y) = \frac{1}{3}(2 - 2^y)$. Dále platí

$$f(g(y)) = \log_2\left(2 - 3\left(\frac{1}{3}(2 - 2^y)\right)\right) = \log_2(2^y) = y.$$

□

Příklad. 4. [3 body] Uvažujme funkci

$$F(x) = 3 \arccos \frac{1-x}{5}.$$

- a) Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]
 b) Načrtněte její graf. [1 bod]
 c) Vyřešte rovnici

$$3 \arccos \frac{1-x}{5} = \pi. \quad [1 \text{ bod}]$$

Řešení. a) Definiční obor získáme řešením nerovnic

$$-1 \leq \frac{1-x}{5} \leq 1.$$

Dostaneme $D(F) = [-4, 6]$. Obor hodnot je $H(F) = [0, 3\pi]$.

b) Její graf na intervalu $[-4, 6]$ najdete na <https://www.wolframalpha.com>, zadáte-li `plot 3 ArcCos[Divide[1-x,5]]`

c) Řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 3 \arccos \frac{1-x}{5} &= \pi, \\ \arccos \frac{1-x}{5} &= \frac{1}{3}\pi, \\ \frac{1-x}{5} &= \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right), \\ \frac{1-x}{5} &= \frac{1}{2}, \\ 1-x &= \frac{5}{2}, \\ x &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□