M1035 6. přednáška

Dodatek ke spojitosti

Věta o nabývání mezihodnot: Nechť funkce $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nechť

$$f(a) < f(b).$$

Potom pro každé $c \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že

$$f(x_0) = c$$

Příklad: Řešte rovnici

$$2^x = 11 - x$$

Rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$f(x) = 2^x + x = 11.$$

Funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 2^0 + 0 = 1$$

$$f(5) = 2^5 + 5 = 37$$

Protože $f(0) = 1 < 11 < 37 = f(5)$ a f je rostoucí, má rovnice

$$f(x) = 11$$

nejvýše jedno řešení $x_0 \in (1,5)$.

Protože je f spojitá, tak podle věty o nabývání mezihodnot musí existovat.

Lze uhodnout, že tímto řešením je $x_0 = 3$.

$f(3) = 2^3 + 3 = 11.$

Žádné jiné řešení neexistuje.

Stejně bychom mohli argumentovat u rovnice

$$2^x + x = 25$$

Ta musí mít také právě jedno řešení $x_0 \in (1,5)$, ale to řešení neuhodneme.

Z $\qquad f(4) = 2^4 + 4 = 20$

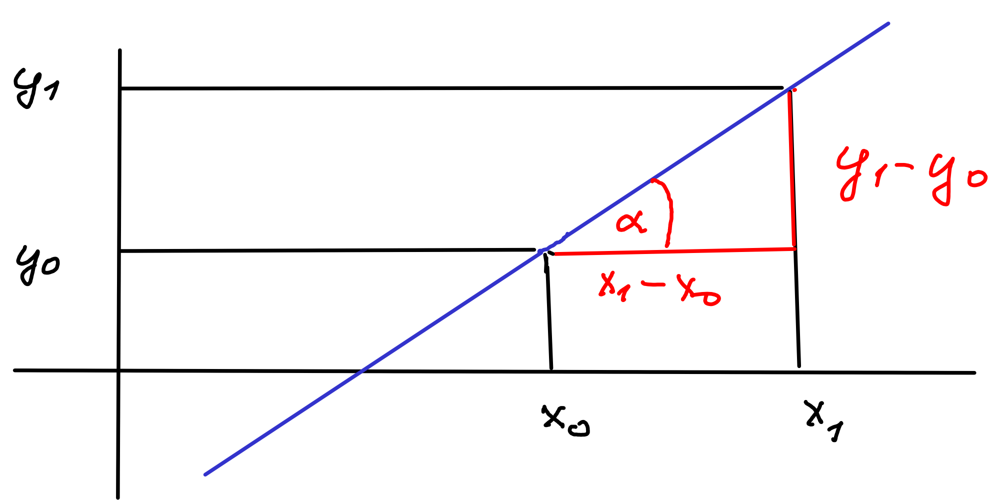
vidíme, že $x_0 \in (4,5)$.

$\boxed{\text{Derivace funkce}}$

Připomeneme, co je směrnice přímky procházející body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$.

Je to podíl

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$



Definice derivace

Nechť $(x_0-\Delta, x_0+\Delta) \subseteq D(f)$ pro nějaké $x_0 \in D(f)$ a $\Delta > 0$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji

$$f'(x_0).$$

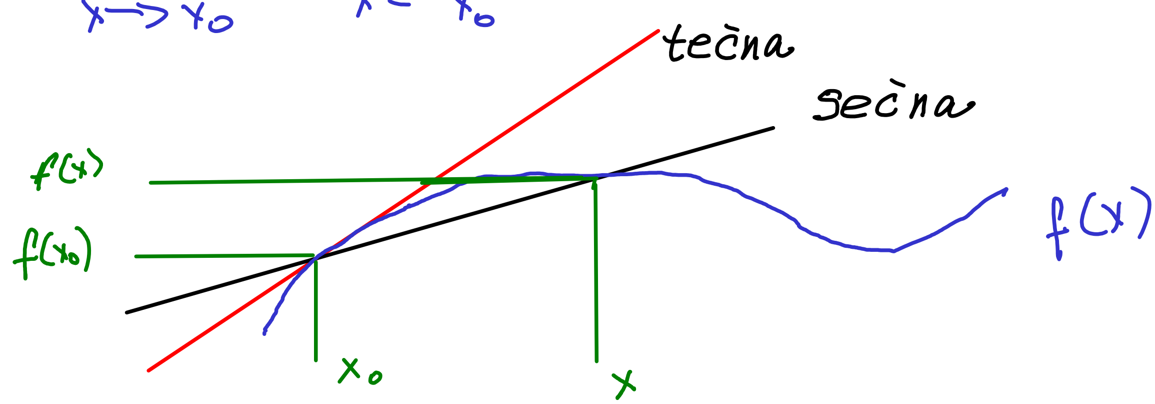
Geometrický význam derivace

Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$ má směrnici

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jestliže se x blíží k x_0, pak se sečny blíží k přímce, kterou nazýváme tečna grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ a její směrnice je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$



Funkce má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.

Můžeme definovat derivaci zleva

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a derivaci zprava

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Často počítáme (záměnou x za $x_0 + h$)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Derivace některých funkcí:

(1) konstantní funkce $f(x) = k$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

(2) Lineární funkce $f(x) = ax + b$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a = a$$

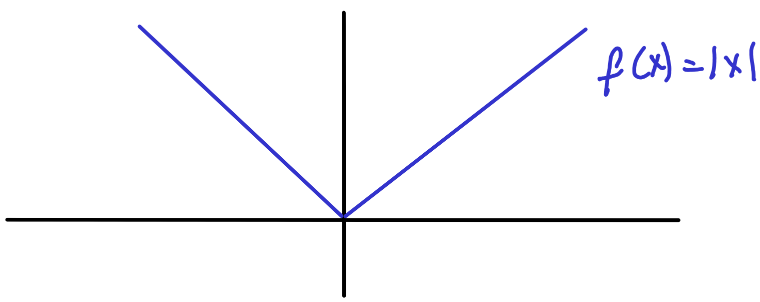
3) Absolutní hodnota $\quad f(x) = |x|$

$x_0 > 0$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim \frac{x_0+h-x_0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$x_0 < 0$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x_0-h-(-x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -1 = -1.$$

$x_0 = 0 \qquad f'_+(x_0) = 1 \quad$ ale $\quad f'_-(x_0) = -1$

derivace v 0 neexistuje



4) $f(x) = x^2$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)\,x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

6) Pro $n \in \mathbb{Z}$ je derivace funkce $f(x) = x^n$ rovna

$$f'(x_0) = n\, x^{n-1}$$

Speciálně

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = \frac{-4}{x^5}$$

7) Pro $f(x) = \sin x$ spočítáme $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{x_0+h-x_0}{2} \cos \frac{x_0+h+x_0}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin(x_0 + \frac{h}{2})}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

8) Obdobně $(\cos x)' = -\sin x$.

9) Spočítáme derivaci funkce $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$$

10) Spočítáme derivaci funkce $f(x) = \ln x$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0}\cdot 1 = \frac{1}{x_0}.$$

Pravidla pro derivování

1. Derivace součtu a rozdílu

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

2. Derivace součinu

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

3. Derivace podílu: Nechť $g(x) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

4) Derivace složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5) Derivace inverzní funkce: nechť f je prostá a má derivaci různou od nuly, pak rovněž f^{-1} má derivaci a ta se rovná

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Geometrický význam: směrnice tečny k inverzní funkci je převrácená hodnota směrnice tečny k původní funkci. (Namalujte si obrázek.)

Ukažme si tato pravidla na příkladech:

2) Derivace součinu $f(x) = x \quad g(x) = x^3$

$$(f(x) \cdot g(x))' = (x^4)' = 4x^3$$

$$f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) = 1 \cdot x^3 + x\, 3 \cdot x^2 = 4x^3$$

3) Derivace podílu $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} = \frac{1 \cdot x^2 - x\, 2x}{x^4} = \frac{-x^2}{x^4} = \frac{-1}{x^2}$$

4) Derivace složené funkce

$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = x^3$

$(f(g(x)))' = (x^6)' = 6x^5$

$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2\,g(x) \cdot 3x^2 = 2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$

5) Derivace inverzní funkce

Vezmeme $f(x) = e^x$, potom $f^{(-1)}(x) = \ln x$.

Platí

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{e'(y)}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e(\ln x)} = \frac{1}{x}$.

Nové výpočty podle pravidel

1) Derivace $tg'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $cotg'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$$tg'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Analogicky $cotg\, x$.

2) Derivace cyklometrických funkcí

arcsin x je inverzní k sin x

$$\boxed{(\arcsin x)' =} \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$x \in [-1, 1]$, $y = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kde vole platí $\cos y \geq 0$ a tedy

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Odtud

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \boxed{= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Obdobně se spočítá, že

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Derivace arctg x je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}$$

Na intervalu $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Proto

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Analogicky

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

3) Derivace funkce $f(x) = a^x$ je

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)'$$
$$= \ln a \cdot a^x$$

4) Derivace funkce $f(x) = \log_a x$ je

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

Fyzikální význam derivace

x je čas, $f(x)$ je dráha bodu na přímce za čas x. $f'(x)$ je okamžitá rychlost v čase x.