# Průběh funkce

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\mathrm{arctg}\,x)}} = \cos^2(\mathrm{arctg}\,x) =$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+1 = \mathrm{tg}^2 y+1$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \ldots\ldots \qquad (\sin x)' = \cos x$$

další tabule

hodnoty arcsin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

kde je $\cos \geq 0$

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$|\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$$

Pro $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je $\cos y = |\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$

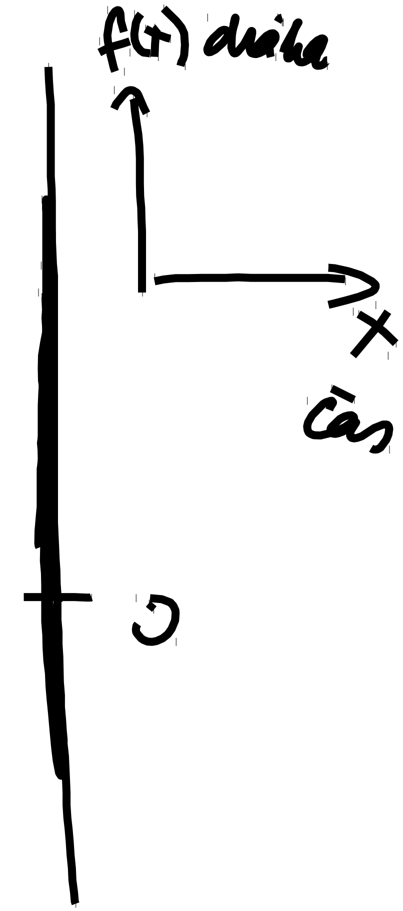
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Obdobně $$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fyzikální význam derivace

x čas, f(x) dráha po přímce na čas x

f'(x) je okamžitá rychlost



# K čemu používáme derivaci?

① Ke zjištění, na kterých intervalech je funkce rostoucí a na kterých klesající.

**Věta:** Ⓐ Jestliže derivace funkce

$$f'(x) > 0$$

pro všechna $x \in I$ (interval), pak je $f$ rostoucí na $I$.

Ⓑ Jestliže pro všechna $x \in I$ je

$$f'(x) < 0,$$

pak je $f$ klesající na $I$.

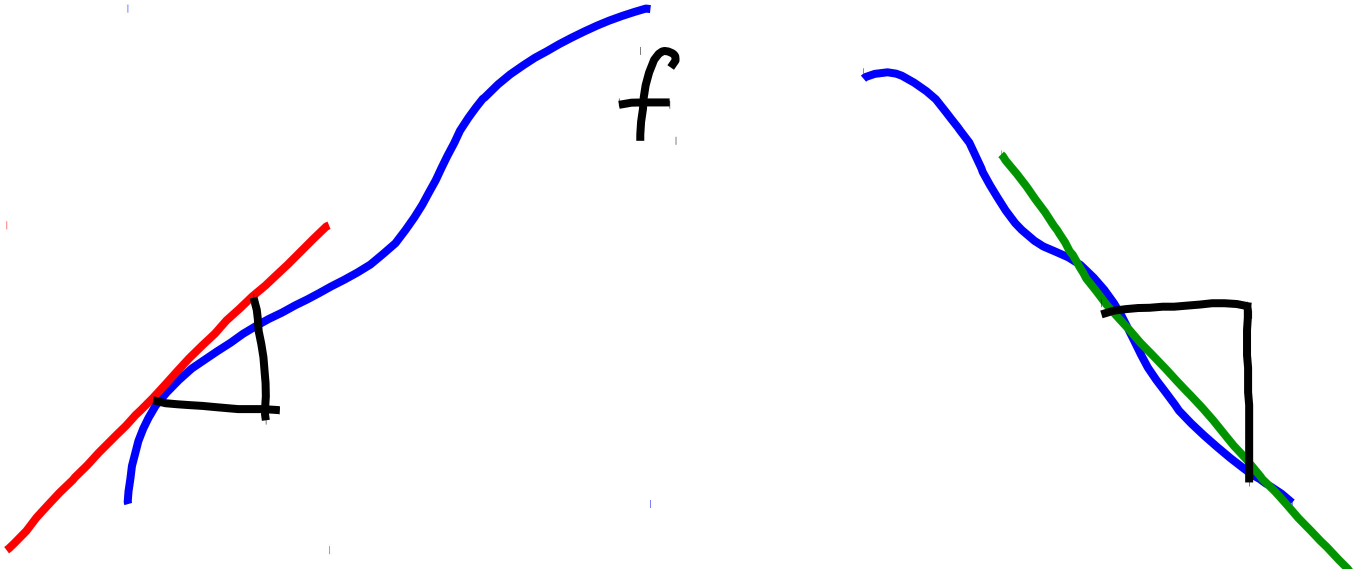
Ⓒ Jestliže pro všechna $x \in I$ je

$$f'(x) \geq 0,$$

pak je $f$ na $I$ neklesající.

$x < y \quad f(x) \leq f(y)$

7) Je-li pro všechna $x \in I$ $f'(x) \leq 0$, je $f$ nerostoucí na $I$.




**Příklad**

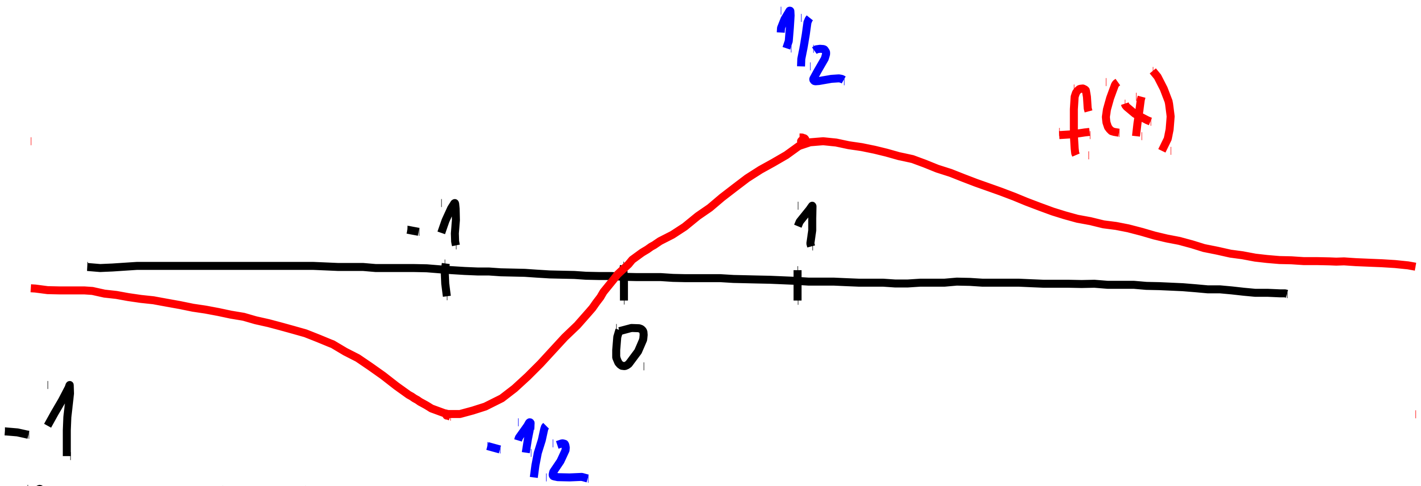
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\,2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | klesá | rastie | klesá |

$f'(x) = 0$ pre
$x = -1, 1$




V bode $x = -1$
má funkcia f minimum
v bode $x = 1$ má f maximum.

## (2) Pomocí derivace umíme hledat lokální a globální extrémy funkcí

Funkce $f$ nabývá v bodě $x_0$ svého GLOBÁLNÍHO maxima,

jestliže $\forall x \in D(f) \quad f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$, $x \neq x_0$ ostré glob. maximum)

---

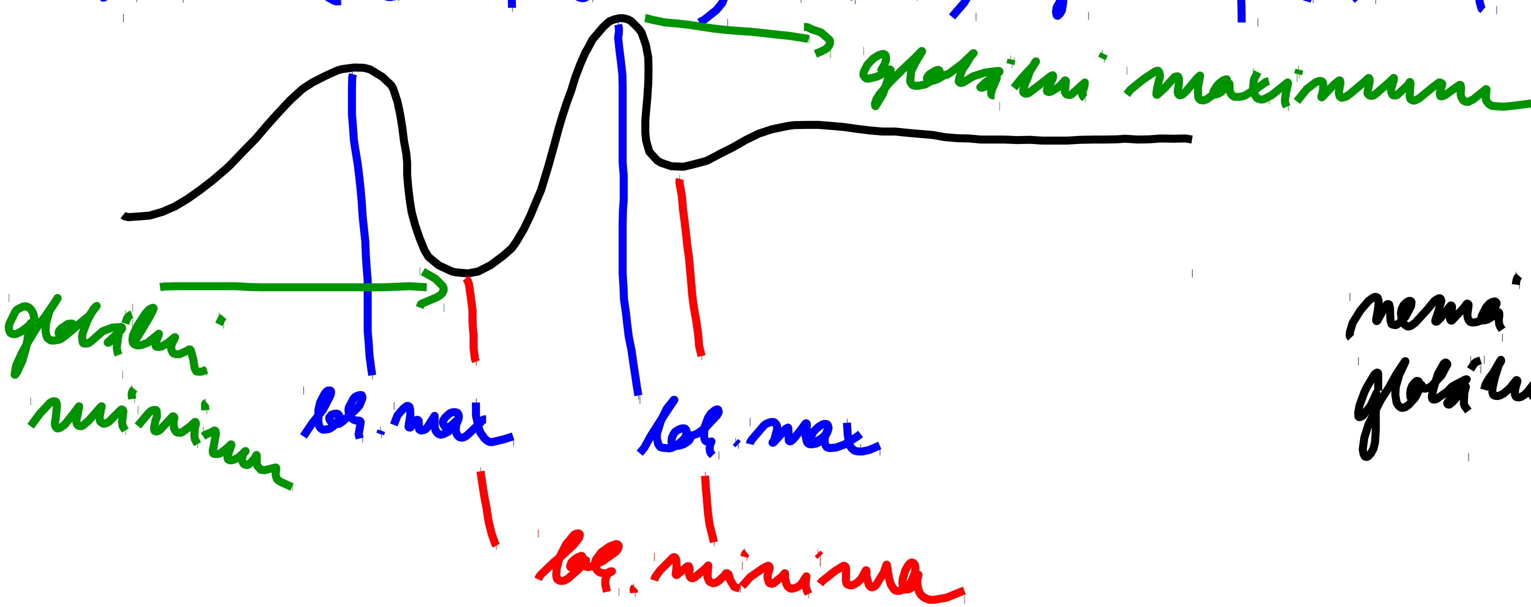
GLOBÁLNÍHO minima

jestliže $\forall x \in D(f) \quad f(x) \geq f(x_0)$

Funkce $f$ nabývá v bodě $x_0$ svého <u>lokálního maxima</u>, jestliže pro všechna $x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta) \cap D(f)$ je

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Funkce $f$ nabývá v $x_0$ svého lokálního minima, jestliže $\forall x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta) \cap D(f)$ je $f(x) \geq f(x_0)$

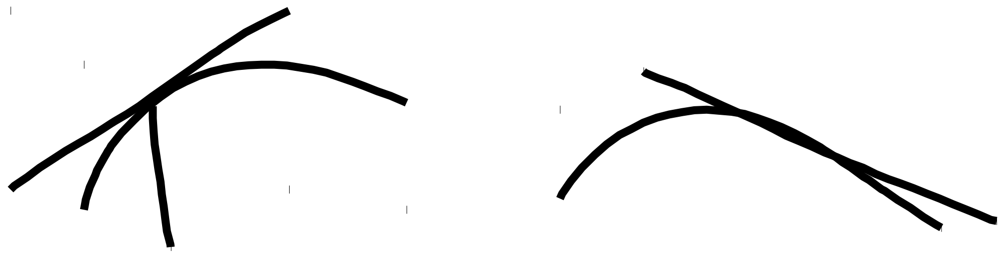


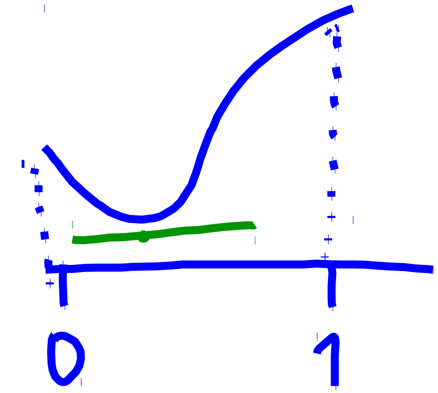

$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$

nemá lokální ani globální extrémy.

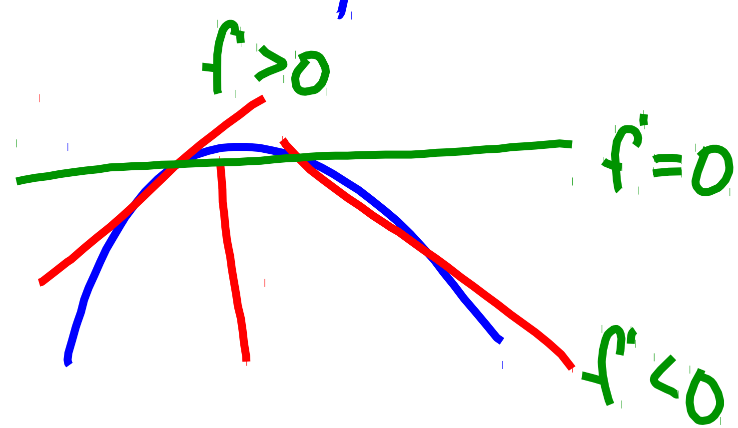
**Věta 2** Jestliže $f$ nabývá v $x_0$ svého extrému a $f'(x_0)$ existuje, pak

$$f'(x_0) = 0$$

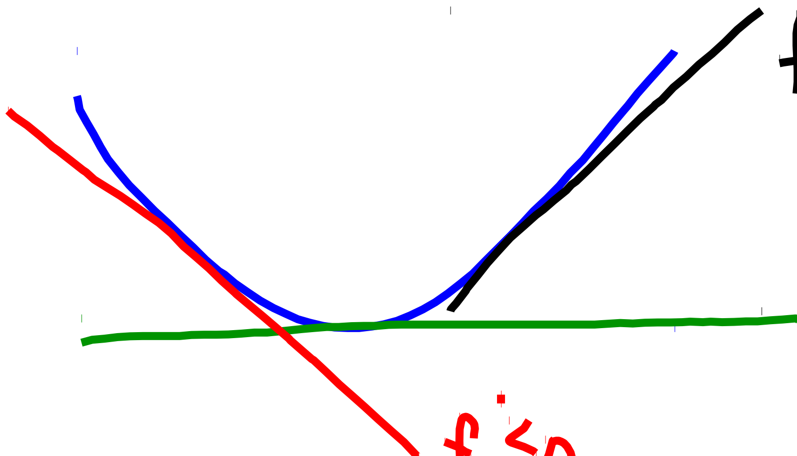





**Věta 3** Jestliže $f' > 0$ na $(x_0 - \Delta, x_0)$, $f' < 0$ na $(x_0, x_0 + \Delta)$ a $f'(x_0) = 0$, pak $f$ nabývá v $x_0$ svého lokálního maxima.

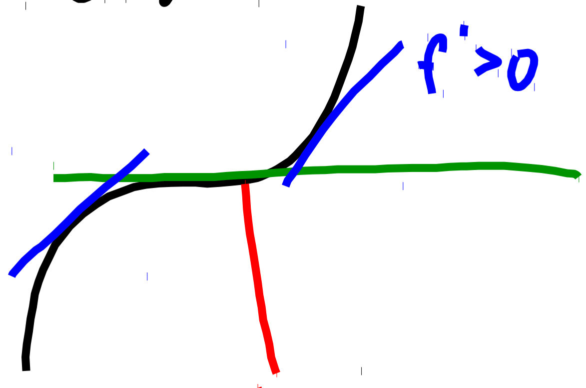


Analogicky: Jestliže $f'(x_0) = 0$ a $f' < 0$ na $(x_0 - \Delta, x_0)$, $f' > 0$ na $(x_0, x_0 + \Delta)$, pak $f$ nabývá v $x_0$ ostrého lok. minima.




Obecně neplatí implikace:

Jestliže $f'(x_0) = 0$, pak má $f$ v $x_0$ lokální extrém.




Body s vlastností $f'(x_0) = 0$ nazýváme stacionární.

# Příklad

$f(x) = 3x^5 - 5x^3$ hledáme extrémy

$f'(x) = 3(5x^4) - 5(3x^2)$

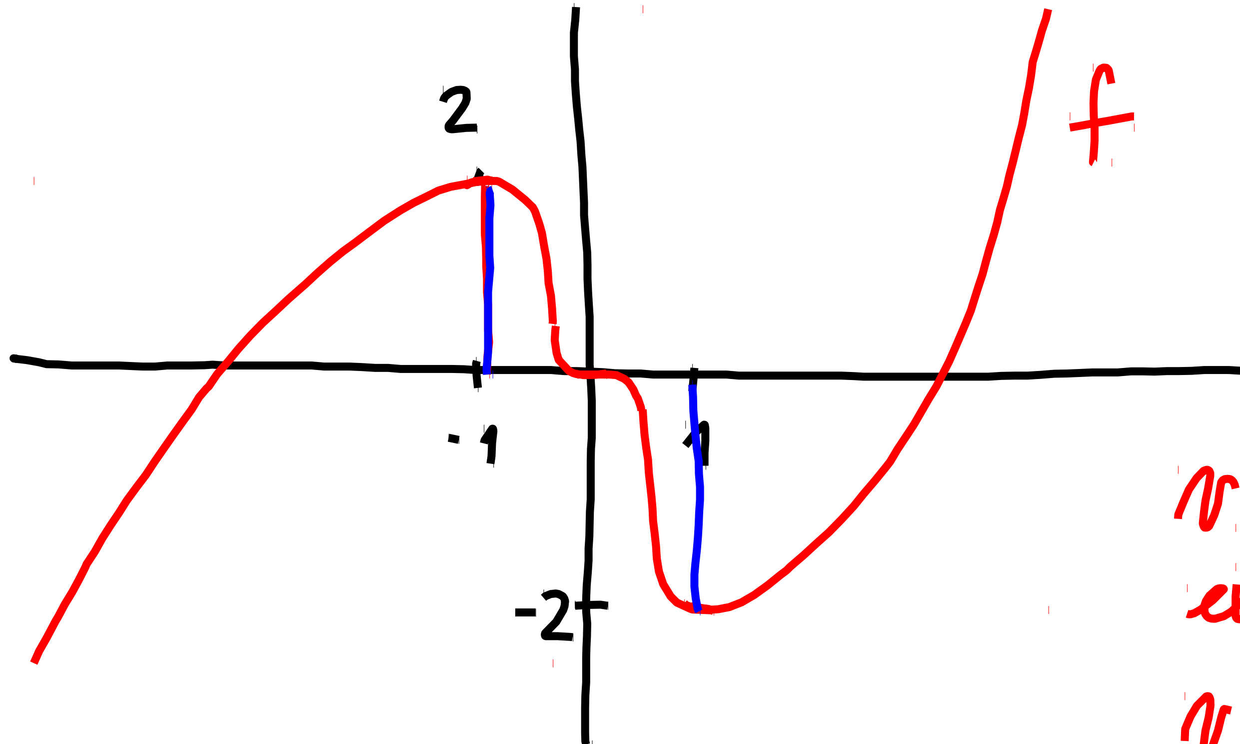
$= 15(x^4 - x^2) = 15x^2(x-1)(x+1)$

$\boxed{(kf)' = \underset{0}{k'}f + \underline{kf'}}$

$f' = 0$ na

$x = -1, 0, 1$

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | roste | klesá | klesá | roste |

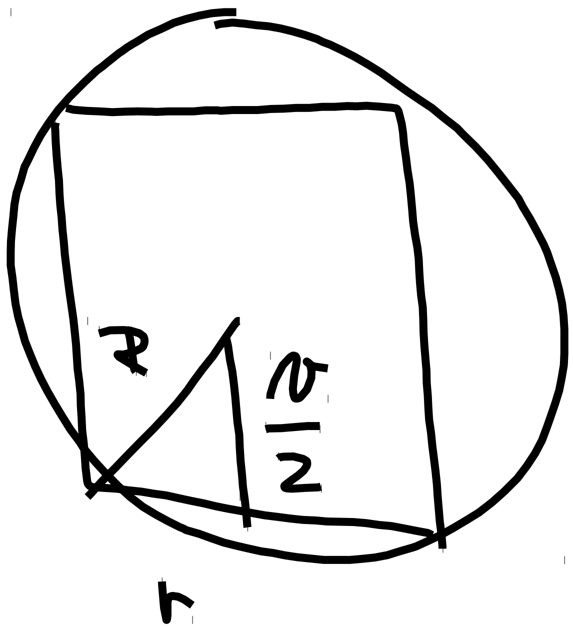



V x = -1 nabývá f lokálního maxima

V x = 0 nemá f extrém

V x = 1 nabývá f svého lokálního minima

**Příklad:** Koule o poloměru $R$, vepište válec s maximálním objemem. Jaká má výšku a poloměr podstavy.




$v$ výška, $r$ poloměr podstavy

$$V = \pi r^2 v = 2\pi r^2 \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right) = V(r)$$

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \qquad v = 2\sqrt{R^2 - r^2} \qquad r \in [0, R]$$

Derivace

$$V'(r) = 2\pi\, 2r\sqrt{R^2-r^2} + 2\pi r^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}(-2r)$$

$$\left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2\pi\left(2r(R^2-r^2)\right) - 2\pi r^3}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{2\pi r\left(2R^2-3r^2\right)}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$V'(r) = 0$ pro $r = 0$, $\quad 2R^2-3r^2=0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

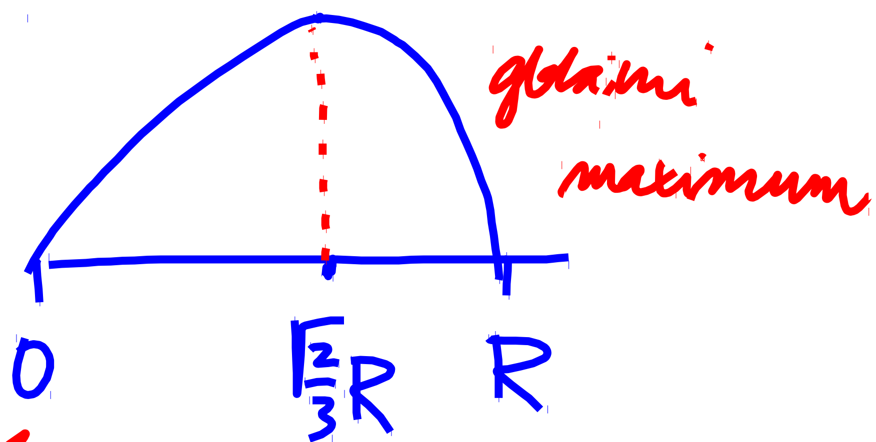
Krajní body $V(0) = 0$, $V(R) = 0$

$V' > 0$ na $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$ $\quad V' < 0$ na $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R, R\right)$

$V(r)$ nabývá svého globálního maxima

v $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ a toto maximum je

$$V\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}R\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi R^3$$




③ Lokální extrémy lze nalézt pomocí 1. a 2. derivace

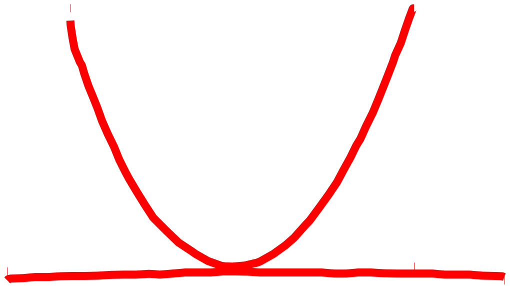
$f$ funkce, $f'$ je její derivace a derivace funkce $f'$ se nazývá 2. derivace a značí se $f''$

**Věta 4** Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)>0$, pak má $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum

Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)<0$, pak má $f$ v bodě $x_0$ lokální maximum.

Jak si to pamatovat

$f(x) = x^2$



$f'(x) = 2x$

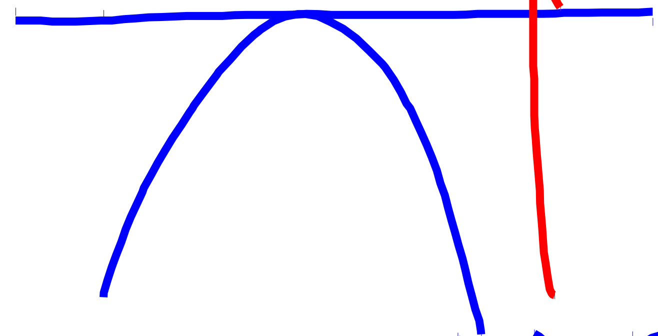
lok. minimum

$f''(x) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{lok. minimum}$$

$g(x) = -x^2$

lok. maximum



$g'(x) = -2x$

$g''(x) = -2$

$g'(0) = 0$

$g''(0) < 0$

(4) Pomocí derivací spočítáme často limity typu

$$\frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\infty}{\infty}$$

$\boxed{\text{l'Hospitalovo pravidlo}}$ Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ nebo } \infty$$

Nechť existuje $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

## Příklady

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$ , počítáme

$$\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \frac{0}{0}?$$

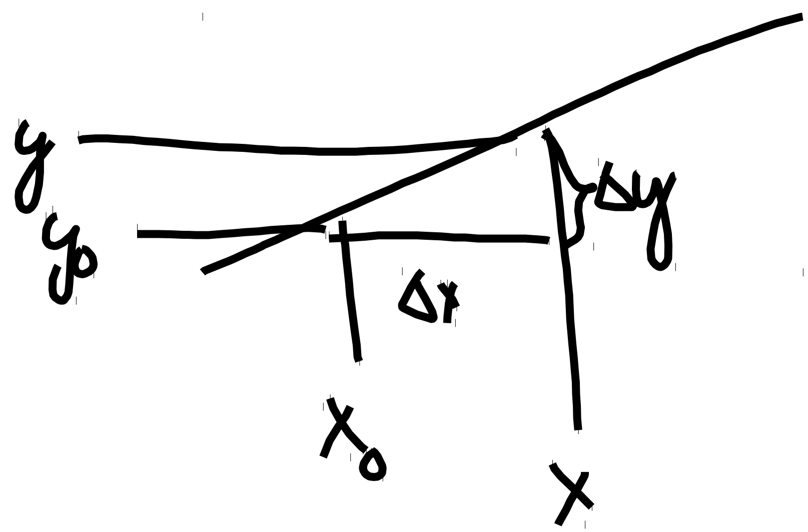
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^2$$

5) Pomocí derivace určíme tečny a normály ke grafu funkce f

Přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$ se směrnicí $k$ má rovnici

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$



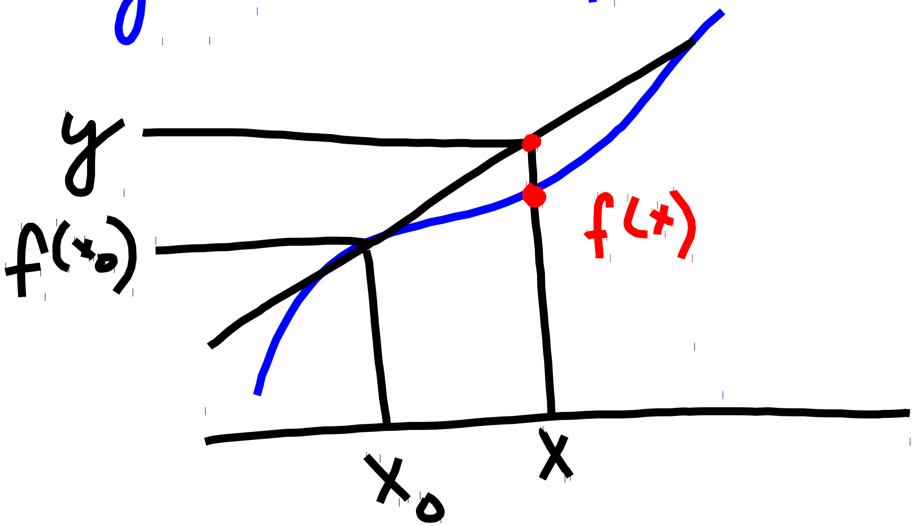

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

Tečna v točki $(x_0, f(x_0))$ na grafu funkcije $f$ je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$




⑥ Tole lahko uporabimo k približnemu računanju funkcije $f$

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Primer** Izračunajte približno $\sqrt{10}$

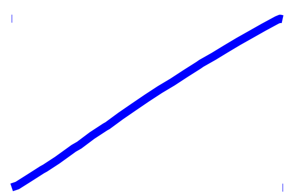
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 9 \quad f(9) = \sqrt{9} = 3$

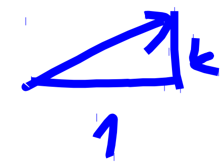
$$\sqrt{10} = f(10) \doteq f(9) + f'(9)\cdot(10-9) = 3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9}}(10-9)$$

$$= 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}.$$

Normála k priamke $y = y_0 + k(x - x_0)$ v bode $(x_0, y_0)$ je priamka prechádzajúca týmto bodom a kolmá k zadanej priamke



smernica je $k$

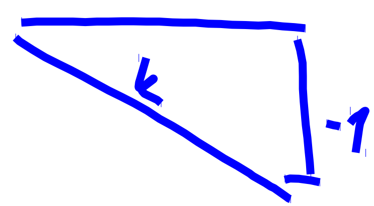



smerový vektor je $(1, k)$

vektor $(k, -1)$ je k tomuto vektoru kolmý

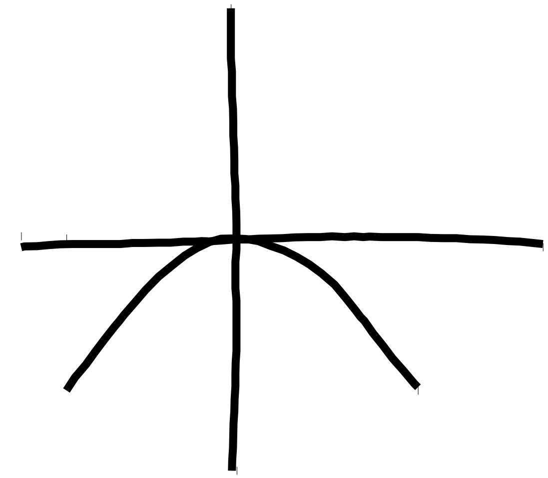
$$(1, k) \cdot (k, -1) = 1 \cdot k + k(-1) = 0$$

Smerový vektor $(k, -1)$ odpovedá smernici $-\frac{1}{k}$.



Normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{pokud } f'(x_0) \neq 0$$



$f'(x_0) = 0$