Diferenciální rovnice

Příklad 1 Růst populace

x čas
y velikost populace
$y = y(x)$

$$y' = ky$$
$$y(0) = y_0$$

Řešení této rovnice je funkce

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$
$$y'(x) = y_0 k e^{kx} = k \cdot y_0 e^{kx}$$
$$y(0) = y_0 e^{k \cdot 0} = y_0$$

Příklad 2

Kmity

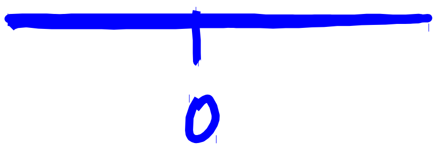
x čas

y výchylka

y(x) výchylka

rychlost změny výchylky je $y'(x)$

zrychlení je druhá derivace $y''(x)$



Rovnice

$$y'' + ky = 0$$

Počáteční podmínky

$$y(0) = 3$$
$$y'(0) = 4$$

Řešení rovnice bez počátečních podmínek je

$$y(x) = a \cos \sqrt{k}\, x + b \sin \sqrt{k}\, x$$

a, b konstanty

$$y'(x) = -a\sqrt{k} \sin \sqrt{k}\, x + b\sqrt{k} \cos \sqrt{k}\, x$$
$$y''(x) = -ak \cos \sqrt{k}\, x - bk \sin \sqrt{k}\, x$$

$$y''(x) + k\, y(x) = 0 \qquad k > 0$$

$$y(0) = a \cos 0 + b \sin 0 = 3 \Rightarrow a = 3$$
$$y'(0) = -a\sqrt{k} \sin 0 + b\sqrt{k} \cos 0 = 4 \qquad b = \frac{4}{\sqrt{k}}$$

Řešení je

$$y(x) = 3 \cos \sqrt{k}\, x + \frac{4}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}\, x$$

Dif. rovnice 1. řádu

$$y' = f(x, y)$$

$y' = \ln(x+y)$

$y' = x^2 + y^2$

$$y(x_0) = y_0$$

x_0, y_0 pevně zadány

Hledáme funkci $y = y(x)$, která splňuje oba vztahy.

Dif. rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$y' = x^2 \cdot y^2$

Nejjednodušší případ

$$y' = f(x) \qquad y(x_0) = y_0$$

Řešení je primitivní funkce F k funkci f. Z nich vybereme takovou, že $F(x_0) = y_0$

Primitivní funkce a určitý integrál

F je primitivní k $f(x)$ $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx$

Určitý integrál s proměnnou horní mezí

$$H(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

$$H'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = F'(x) - \big(F(a)\big)' = F'(x) = f(x)$$

$H(x)$ má vlastnost, že $H(a) = 0$

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

F je nějaká prim. funkce $\qquad c = y_0 - F(x_0)$

F + c je jiná —"— $\qquad F(x_0) + c = y_0$

Řešení je $y(x) = F(x) + \underbrace{y_0 - F(x_0)}$

Konstantu volíme tak, aby vyhovovala počáteční podmínce.

$$y'(x) = F'(x) = f(x)$$

$$y(x_0) = F(x_0) + y_0 - F(x_0)$$

Lze brát $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ $\quad F'(x) = f(x)$

$$F(x_0) = 0$$

Řešení je $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$$y' = g(y) \qquad y(x_0) = y_0$$

necht $g(y_0) \neq 0$

a $g(y) \neq 0$ na

intervalu I, $y_0 \in I$

$$\frac{y'}{g(y)} = 1$$

Bereme jako funkce proměnné x

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = 1$$

Integrujeme podle x

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int 1\,dx$$

Substituce

$y = y(x)$

$dy = y'\,dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + C$$

Nechť $G(y)$ je prim. funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$

$$G(y(x)) = x + c$$

Nechť G má inverzní funkci G^{-1}, aplikujeme na obě strany

$$\underbrace{G^{-1}G}_{id}(y(x)) = G^{-1}(x+c)$$

$$y(x) = G^{-1}(x+c)$$

c volíme tak, aby

$$y(x_0) = G^{-1}(x_0+c) = y_0$$

$$y' = ky, \quad k \neq 0, \quad y(0) = 5$$

$$\frac{y'}{y} = k \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = k$$

integrujeme podle x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dy = kx + c$$

Substitute

$y = y(x)$

$dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = kx + c$$

$$\ln|y| = kx + c$$

$$\ln|y(x)| = kx + c$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{kx+c} = e^{kx} \cdot e^{c}$$

$$|y(x)| = L e^{kx}$$

$$|y(0)| = L e^{0}$$

$$5 = L$$

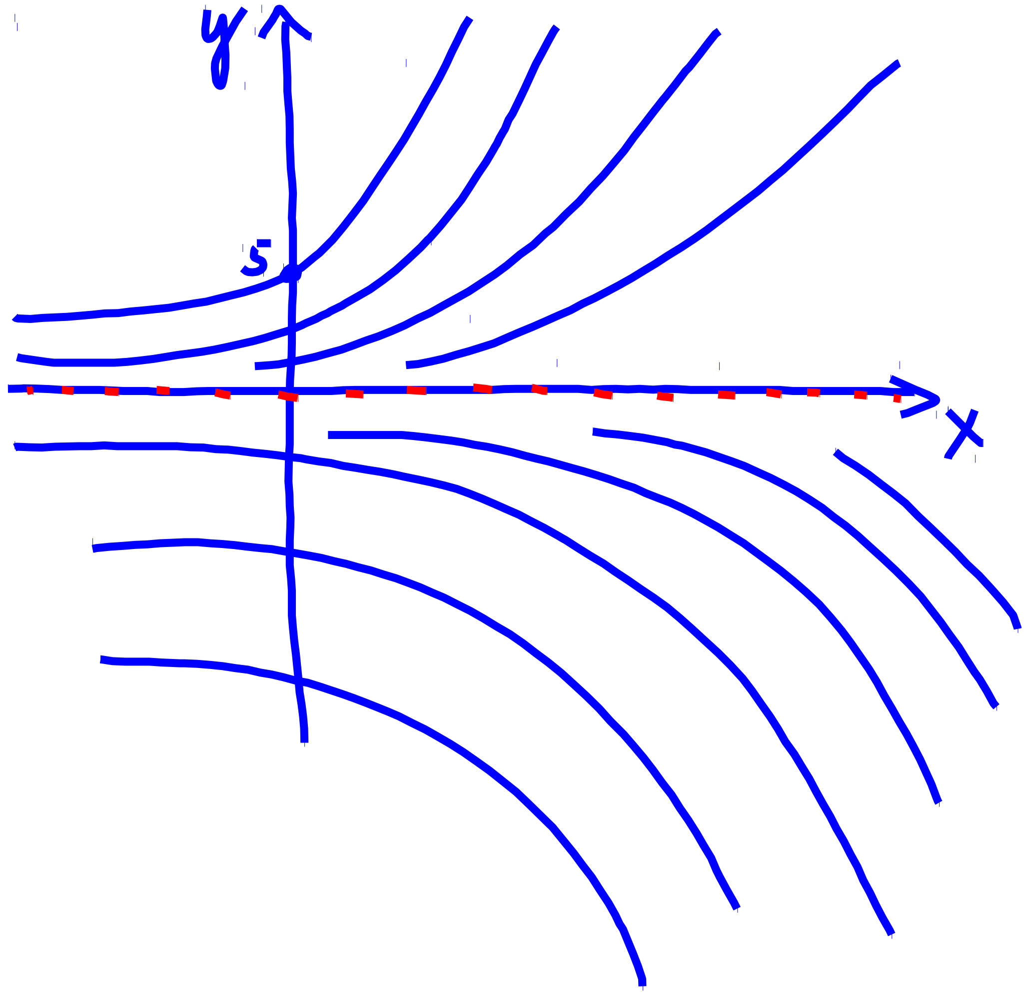
$y(0) = 5 > 0$

$y(0) = -3$

$$|y(x)| = 5e^{kx}$$

$$y(x) = 5e^{kx}$$

$$y(x) = -3e^{kx}$$



$y(x) = 5e^{kx}$

rodzina rozwiązań

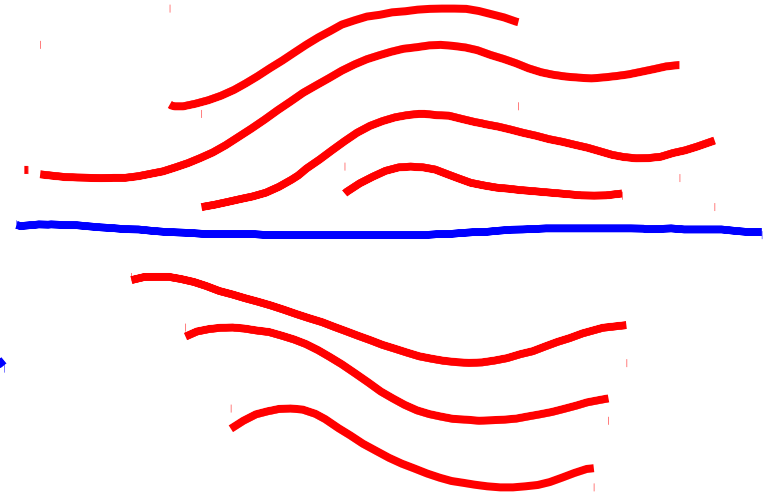
$y(x) = Le^{kx}$

$L = 0 \quad y(x) = 0$

Příklad:

$$y' = x y \qquad x(0) = -5$$

$y(x) \equiv 0$ je řešení



$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

Integrujeme podle x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln|y| = \ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c \qquad L > 0$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{\frac{x^2}{2} + c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c} = L \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$|y(x)| = L \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = \pm L e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = M e^{\frac{x^2}{2}}$$

$M > 0$ nebo $M < 0$
nebo $M = 0$

Všechna řešení jsou

$$y(x) = M e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ kde } M \in \mathbb{R}$$

Hledáme řešení s $y(0) = -5$

$$-5 = M e^{\frac{0^2}{2}} \Rightarrow M = -5$$

$$\boxed{y(x) = -5e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Obecný postup

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$ integrujeme podle x

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+c$$

substituce

$y = y(x)$

$dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = F(x)+c$$

nechť G je primitivní funkce k funkci $\dfrac{1}{g(y)}$

$$G(y(x)) = F(x)+c$$

Je-li G^{-1} inverzní k funkci G, pak aplikujeme G^{-1} na obě strany

$$G^{-1}G(y(x)) = G^{-1}(F(x)+c)$$

$$y(x) = G^{-1}(F(x)+c)$$

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)+c) = y_0$$

$G^{-1}(F(x_0)+c) = y_0$ $\quad$ / aplikujeme G

$F(x_0)+c = G(y_0)$

$$\boxed{c = G(y_0) - F(x_0)}$$

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad F(x_0)=0}$$

Řešení je

$$y(x) = G^{-1}\Big(F(x) + G(y_0) - F(x_0)\Big)$$

<u>Příklad:</u>

$$y' = \frac{1}{x}(4y-1) \qquad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \neq 0$$

$$\frac{y'}{4y-1} = \frac{1}{x} \qquad \text{integrujeme}$$

$$\int \frac{y'(x)}{4y(x)-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{4y-1} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|4y-1| = \ln|x| + c$$

$$\ln|4y-1| = 4\ln|x| + 4c$$

$$= \ln x^4 + 4c$$

$$e^{\ln|4y-1|} = e^{\ln x^4 + 4c} = e^{4c} \cdot e^{\ln x^4}$$

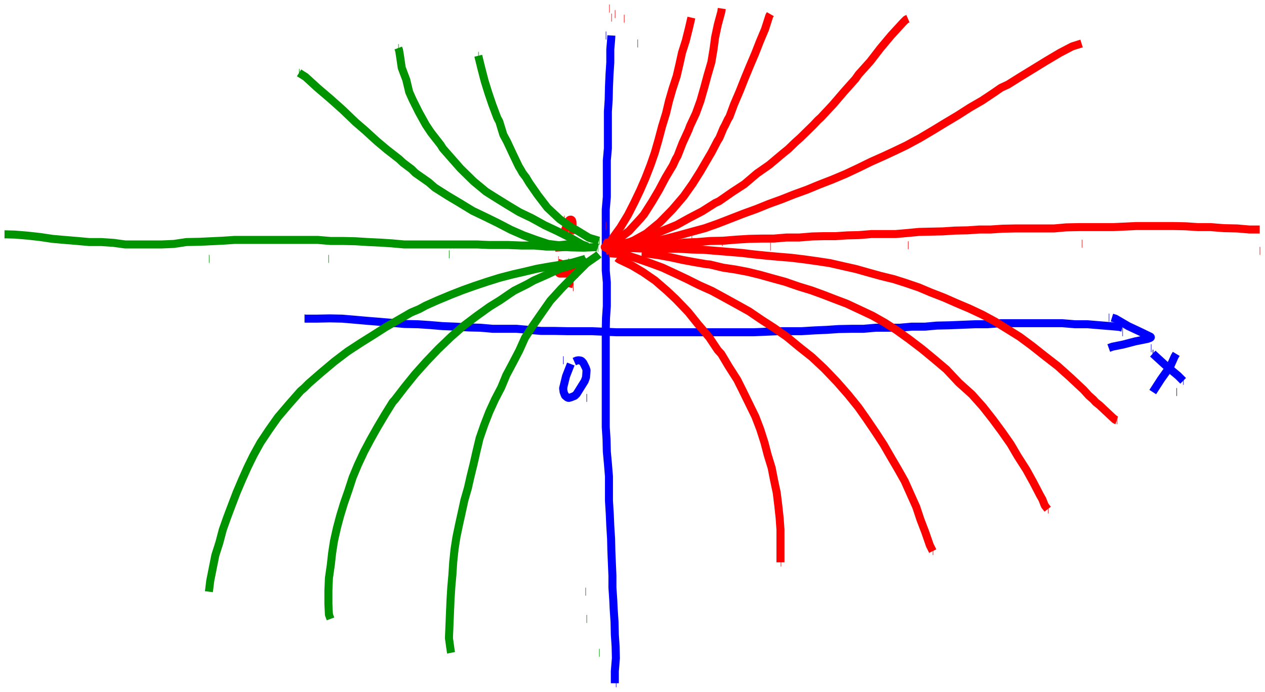
$$|4y-1| = L x^4 \qquad L \geq 0$$

$$4y-1 = \pm L x^4$$

$$4y-1 = M x^4 \qquad M \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{Mx^4 + 1}{4}$$

$$y_0 = y(x_0) = \frac{Mx_0^4 + 1}{4} \qquad M = \frac{4y_0 - 1}{x_0^4}$$



$$\frac{Mx^4+1}{4}$$

$$y' = \frac{4y-1}{x}$$

Příklad

$$(x+1)y' = xy \qquad y(0) = y_0$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x+1}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{x}{x+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dt$$

$$\ln|y(x)| = x - \ln|x+1| + c$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{x - \ln|x+1| + c} = \frac{e^x}{e^{\ln|x+1|}} \cdot e^c$$

$$|y(x)| = \frac{e^x}{|x+1|} \cdot L \qquad L \geq 0 \quad x \neq -1$$

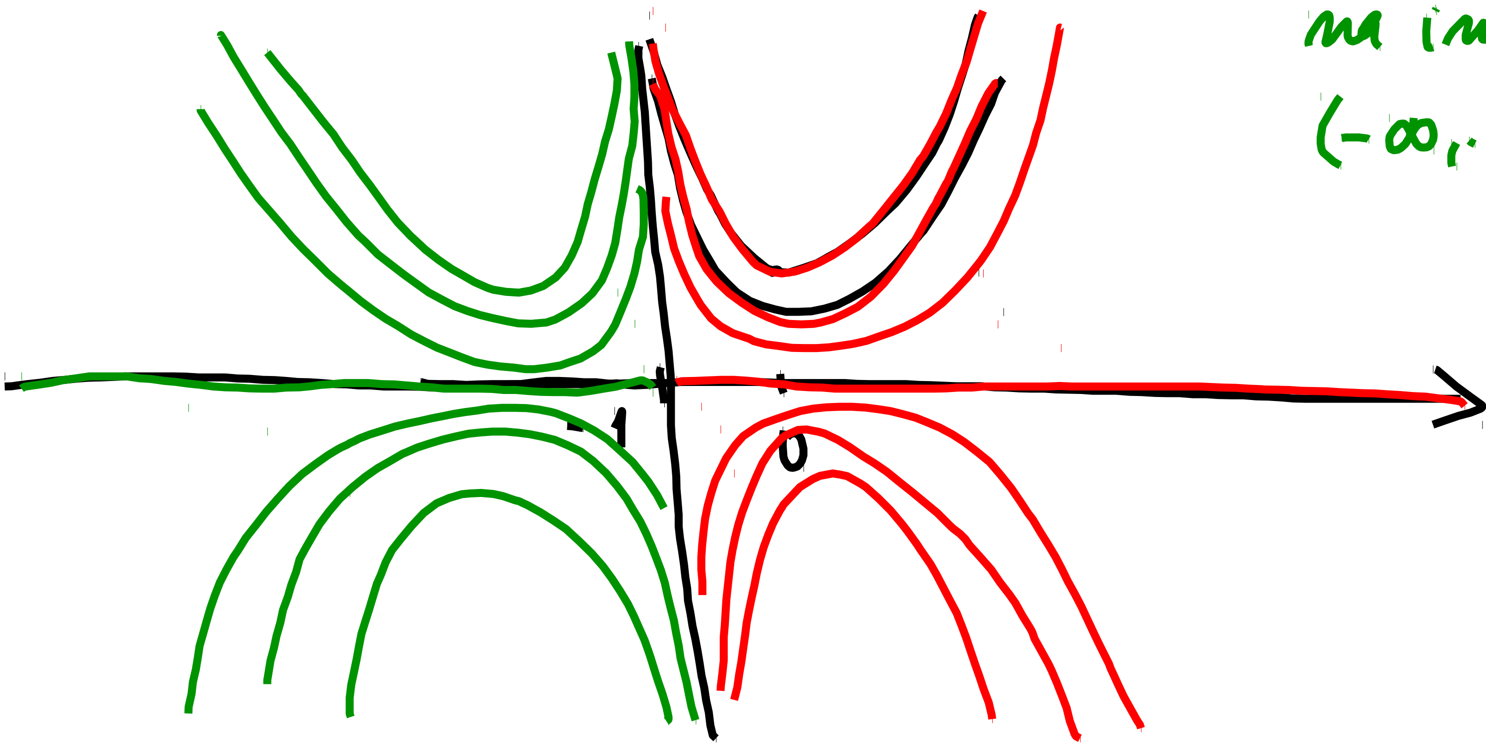
$$y(x) = \frac{M e^x}{x+1} \qquad M \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = M\frac{e^x}{x+1} \qquad M \in \mathbb{R}$$

$$y_0 = y(0) = M\frac{1}{1} \qquad M = y_0$$

Řešení je $$y(x) = y_0 \frac{e^x}{x+1}$$

Řešení existují na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$



Poločas rozpadu — Radioaktivní uhlík má poločas rozpadu 5568 let. Rozpadá se podle dif. rovnice

$$N' = -\lambda N$$

N počet molekul v čase t

$\lambda > 0$ konstanta

Za jak dlouho se rozpadne 25% uhlíku

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$ řešení rovnice

$$\frac{N_0}{2} = N(5568) = N_0 e^{-\lambda 5568}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot 5568}$$

$$-\ln 2 = \ln \frac{1}{2} = (-\lambda) 5568 \implies \lambda = \frac{\ln 2}{5568}$$

25% za čas t: $$\frac{3}{4} N_0 = N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{5568} \cdot t}$$

$$\frac{3}{4} = e^{\frac{\ln 2}{5568} \cdot t}$$

$$\ln \frac{3}{4} = \frac{\ln 2}{5568} \cdot t$$

$$t = 5568 \cdot \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 2310 \text{ let}$$