

C. Písemka v semestru z M1035, prosinec 2022

Příklad 1. [3 body] Uvažujme funkci $f(x) = |2x + 5| - |4 - x|$.

- Rozdělte reálná čísla na několik intervalů a na nich napište funkci f jako lineární funkci. [2 body]
- Načrtněte graf funkce f na intervalu $[-6, 6]$. [1 bod]

Řešení. Na $(-\infty, -5/2]$ je $f(x) = -x - 9$, na $[-5/2, 4]$ je $f(x) = 3x + 1$, na $[4, \infty)$ je $f(x) = x + 9$. Graf funkce na intervalu $[-6, 6]$ dostanete, zadáte-li na <https://www.wolframalpha.com> plot $|2x+5|-|4-x|$ from -6 to 6

□

Příklad 2. [3 body] Racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x^3 + 12x^2 + 48x + 57}{x^2 + 10x + 25}$$

napište jakou součet polynomu (který je částečným podílem) a racionální lomené funkce zapsané jako součet parciálních zlomků.

Řešení.

$$R(x) = x + 2 + \frac{3}{x + 5} - \frac{8}{(x + 5)^2}$$

□

Příklad 3. [3 body] Uvažujme funkci

$$F(x) = 2 - \log_4(1 - 3x).$$

- Napište její definiční obor a obor hodnot. [1 bod]
- Napište konkrétní hodnoty této funkce ve třech různých hodnotách x . [1 bod]
- Najděte k funkci $F(x)$ inverzní funkci $g(y)$, napište její předpis, definiční obor a obor hodnot. [1 bod]

Řešení. a) $D(F) = (-\infty, 1/3)$, $H(F) = (-\infty, \infty)$.

b) $F(0) = 2$, $F(-1) = 1$, $F(-5) = 0$.

c) Inverzní funkce je $x = g(y)$ s definičním oborem $D(g) = (-\infty, \infty)$ a oborem hodnot $H(g) = (-\infty, 1/3)$ spočítáme takto: pro $y \in (-\infty, \infty)$ řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 2 - \log_4(1 - 3x) &= y \\ 4^{\log_4(1-3x)} &= 4^{2-y} \\ 1 - 3x &= 4^{2-y} \\ x &= \frac{1 - 4^{2-y}}{3}. \end{aligned}$$

Tedy $g(y) = \frac{1 - 4^{2-y}}{3}$.

□

Příklad 4. [3 body] V intervalu $[0, 2\pi]$ najděte všechna řešení goniometrické rovnice

$$\cos x - 2 \sin^2 x + 1 = 0.$$

Řešení. Po dosazení $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dostaneme rovnici

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Po substituci $y = \cos x$ řešíme kvadratickou rovnici

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

Ta má řešení -1 a $\frac{1}{2}$.

Rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ má v $[0, 2\pi]$ řešení $\frac{1}{3}\pi$ a $\frac{5}{3}\pi$.

Rovnice $\cos x = -1$ má řešení π .

□