## A. Zkouška z M1035, podzim 2022

**Příklad. 1.** [ 6 bodů] Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^5-x^3+2x}{12-2x^5}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\arcsin x}$,

c) derivaci funkce $f(x)=5^x\cdot\tan x$,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x)=\ln x^2$,

e) objem tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in[0,2],\ 0\le y\le x^2\}$ kolem osy $x$,

f) všechna řešení diferenciální rovnice $y'=2\cdot y$.

*Řešení.* Za každou úlohu je jeden bod.

(a)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^5-x^3+2x}{12-2x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{12}{x^5}-2}=-3.$$

(b) Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{e}^{x}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=2.$$

(c) $f'(x)=\ln 5\cdot\ 5^x\cdot\tan x+\dfrac{5^x}{\cos^2 x}$.

(d) Protože $g(x)=\ln x^2=2\ln x$, je pomocí per partes

$$\int g(x)\,dx=2\int\ln x\,dx=2\left(x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=$$
$$=2\,(x\ln x-x)+c.$$

(e) Pomocí integrálu je objem

$$V=\pi\int_0^2 x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32}{5}\pi.$$

(f) Všechna řešení jsou $y(x)=c\,\mathrm{e}^{2x}$, kde $c\in\mathbb{R}$. Zdůvodnění je

$$\begin{aligned}\int\frac{y'(x)}{y(x)}dx&=\int 1\,dx\\ \int\frac{1}{y}&=x+k\\ \ln|y(x)|&=x+k\\ |y(x)|&=\mathrm{e}^{x+k}=\mathrm{e}^{k}\cdot\mathrm{e}^{x}=d\,\mathrm{e}^{x},\quad d>0,\\ y(x)&=\pm d\,\mathrm{e}^{x}\,.\end{aligned}$$

Odtud $y(x)=c\,\mathrm{e}^x$, kde $c>0$ nebo $c<0$. Ale $y(x)\equiv 0=0\cdot\mathrm{e}^x$ je rovněž řešení. Proto obecně $c\in\mathbb{R}$.

□

**Příklad. 2.** [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4}.$$

a) Najděte limity v krajních bodech definičního oboru.
b) Spočítejte derivaci.
c) Zjistěte, kde je funkce rostoucí na kde klesající.
d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.
e) Najděte obor hodnot.
f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-10, 10]$.

*Řešení.* Za každou podúlohu 1 bod.

(a) Definiční obor je $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+4} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x^2+4} = 0$$

(b)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - (2x+3)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2-6x+8}{(x^2+4)^2}.$$

(c) Derivace je nulová pro $x = -4$ a $x = 1$. Na $(-\infty, -4)$ je derivace záporná a funkce je klesající. Na $(-4, 1)$ je derivace kladná a funkce je rostoucí a na $(1, \infty)$ je derivace záporná a funkce je klesající.

(d) Funkce nabývá dvou extrémů, a to globálního minima v bodě $-4$ a globální maxima v bodě $1$.

$$f(-4) = -\frac{1}{4}, \quad f(1) = 1.$$

(e) Funkce je spojitá. Z limit v $\pm\infty$ a průběhu funkce plyne, že obor hodnot je $[-\frac{1}{4}, 1]$.

(f) Graf na intervalu $[-10, 10]$ najdete na https://www.wolframalpha.com, zadáte-li

plot Divide[$(2x+3)$, $(x^2+4)$] from -10 to 10

□

**Příklad. 3.** [6 bodů] Pomocí vhodné substituce spočítejte

$$\int \frac{(x^2+1)x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Udělejte zkoušku, že jste počítali dobře.

*Řešení.* Definiční obor funkce určené k integraci je $(-1,1)$. Použijeme substituci

$$t = 1 - x^2, \quad \text{kde } t \in (0,1).$$

[1 bod] Odtud

$$dt = -2x\,dx.$$

[1 bod]

Nyní počítáme podle věty o substituci

$$\int \frac{(x^2+1)x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(1-t+1)\,dt}{-2\sqrt{t}} = -\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{2}\int \sqrt{t} = -2t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + c =$$
$$= \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - 2(1-x^2)^{1/2} + c$$

[2 body]

Ještě jednodušší je substituce $y = \sqrt{1-x^2}$, $y^2 = 1 - x^2$, $2x\,dx = 2y\,dy$ a počítáme integrál

$$\int (2 - y^2)\,dy.$$

Zkouška. Spočítáme derivaci funkce $F(x) = \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - 2(1-x^2)^{1/2} + c$:

$$F'(x) = \cdots = \frac{(x^2+1)x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[2 body] Pokud jste počítali dobře a zkouška vyšla, dostanete dva body. Pokud zkouška nevyjde, je potřeba udělat závěr, že náš výpočet integrálu je špatně. Bez tohoto závěru žádný bod nedostanete.

□

**Příklad. 4.** [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$2xyy' = 1 + x$$

s počáteční podmínkou

$$y(1) = -3.$$

Proveďte zkoušku.

*Řešení.* Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ji zapíšeme takto

$$2y(x)y'(x) = \frac{1+x}{x}$$

provedeme integraci podle proměnné $x$:

$$\int 2y(x)y'(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right)\,dx,$$

$$\int 2y\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + \int 1\,dx,$$

$$y^2 = \ln|x| + x + c$$

[3 body] Proto

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln|x| + x + c},$$

přitom funkce $y(x)$ je definována pro $x$ splňující nerovnost

$$\ln|x| + x \geq -c.$$

Má-li být $y(1) = -3$ musíme volit znaménko minus a musí být

$$y^2(1) = 9 = \ln 1 + 1 + c.$$

Odtud

$$c = 9 - \ln 1 - 1 = 8.$$

[1 bod]

Hledané řešení je

$$y(x) = -\sqrt{\ln|x| + x + 8}.$$

[1 bod]

Zkouška [1 bod]. Dostanete je při správném řešení a správně spočítané zkoušce nebo při špatně spočítaném řešení, když uděláte ze zkoušky závěr, že vaše řešení je chybné. □