B. Zkouška z M1035, podzim 2022

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6-x-x^2}{x^2-2x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$,

c) derivaci funkce $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$,

e) obsah množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0,2],\ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{x}}\}$,

f) řešení diferenciální rovnice $y' = 5$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2023$.

Řešení. Za každou úlohu je jeden bod.

(a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{6-x-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-3-x}{x} = -\frac{5}{2}.$$

(b) Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}} = \mathrm{e}^2\,.$$

(c) $f'(x) = \dfrac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$.

(d) Pomocí substituce $y = 2x$ je

$$\int g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\arcsin y + c = \frac{1}{2}\arcsin 2x + c.$$

(e) Pomocí integrálu je obsah

$$S = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_0^2 = 2\sqrt{2}.$$

(f) Řešení je $y(x) = 5x + 2018$, neboť $y(x) = \int 5\,dx = 5x + c$.

$\square$

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

a) Napište definiční obor a najděte limity v jeho krajních bodech.
b) Spočítejte derivaci.
c) Zjistěte, kde je funkce rostoucí a kde klesající.
d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.
e) Najděte obor hodnot.
f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-10, 10]$.

Řešení. Za každou podúlohu 1 bod.

(a) Definiční obor je $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3-2/x)}{|x|\sqrt{1+2/x^2}} = -3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(3-2/x)}{|x|\sqrt{1+2/x^2}} = 3$$

(b) Derivujeme jako podíl. Po úpravách je

$$f'(x) = \frac{2x+6}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) Derivace je nulová pro $x = -3$. Na $(-\infty, -3)$ je derivace záporná a funkce je klesající. Na $(-3, \infty)$ je derivace kladná a funkce je rostoucí.

(d) Funkce nabývá jediného extrému, a to globálního minima v bodě -3.

$$f(-3) = -\sqrt{11}.$$

(e) Funkce je spojitá. Z limit v $\pm\infty$ a průběhu funkce plyne, že obor hodnot je $[-\sqrt{11}, 3)$.

(f) Graf na intervalu $[-10, 10]$ najdete na https://www.wolframalpha.com, zadáte-li

plot Divide[$(3x - 2)$, sqrt $(x^2 + 2)$] from -10 to 10

□

Příklad. 3. [6 bodů] Pomocí určitého integrálu spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leq y \leq x + 2\}$$

kolem osy x.

Řešení. Nerovnost $x^2 \leq x + 2$ nastane, právě když $-1 \leq x \leq 2$. [2 body]

Objem tělesa vzniklého rotací bude

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 \, dx - \pi \int_{-1}^{2} x^4 \, dx$$

[2 body] Výpočet

$$\pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi.$$

[2 body]

□

Příklad. 4. [6 bodů] Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{xy}{1+x^2}.$$

Mezi nimi najděte to, které splňuje počáteční podmínku

$$y(1) = 0,$$

a to, které splňuje počáteční podmínku

$$y(1) = -5.$$

Pro obecné řešení proveďte zkoušku.

Řešení. Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ji zapíšeme takto

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Provedeme integraci podle proměnné x: Přitom použijeme substitici $t = 1 + x^2$.

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k = \ln(\mathrm{e}^k \cdot \sqrt{1+x^2})$$

[2 body] Tedy

$$|y(x)| = e^k\sqrt{1+x^2}.$$

Proto

$$y(x) = \pm e^k\sqrt{1+x^2} = c\sqrt{1+x^2}, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

[1 bod]

Všimněte si, že $y(x) \equiv 0$ je řešení s $y(1) = 0$. [1 bod]

Má-li být $y(1) = -5$ musíme volit

$$y(1) = -5 = c\sqrt{1+1^2}.$$

Odtud

$$c = -\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Hledané řešení je

$$y(x) = -\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}.$$

[1 bod]

Zkouška [1 bod]. Dostanete ho při správném řešení a správně spočítané zkoušce nebo při špatně spočítaném řešení, když uděláte ze zkoušky závěr, že Vaše řešení je chybné. □