C. Zkouška z M1035, podzim 2022

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0_+} x \ln x$,

c) derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, výsledek napište jako jednoduchý zlomek,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

e) objem tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,4],\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$,

f) řešení diferenciální rovnice $y' = 0$ s počáteční podmínkou $y(20) = 23$.

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln(x^3 - x).$$

a) Napište definiční obor.
b) Najděte limity v jeho krajních bodech.
c) Spočítejte derivaci.
d) Zjistěte, kde je funkce rostoucí a kde klesající.
e) Najděte lokální a globální extrémy funkce.
f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-5, 5]$.

Příklad. 3. [6 bodů] Načrtněte obrázek množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y \le 6 - x\}$$

a pomocí určitého integrálu spočtěte její obsah.

Příklad. 4. [6 bodů] Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = xy^2.$$

Mezi nimi najděte to, které splňuje počáteční podmínku

$$y(1) = -3.$$

Pro obecné řešení proveďte zkoušku.

Zkouška C

1. příklad - řešení

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

c) $$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

d) $$\int g(x)\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \underset{dy=2x\,dx}{\overset{y=1+x^2}{=}} \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln|y| + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

e) $$V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$
$$= 8\pi$$

f) $$y' = 0 \quad y(x) = \int y'\,dy = \int 0\,dx = c$$
$$y(x) = 23$$

Zkouška C

2. příklad řešení

a) Definiční obor $\quad x^3 - x > 0$

$$x(x-1)(x+1) > 0$$

Platí pro $\quad x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

$D(f) = (-1,0) \cup (1,\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^3 - x) = \lim\limits_{y\to\infty} \ln y = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1+} \ln(x^3 - x) = \lim\limits_{y\to 0_+} \ln y = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0-} \ln(x^3 - x) = \lim\limits_{y\to 0_+} \ln y = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1+} \ln(x^3 - x) = \lim\limits_{y\to 0+} \ln y = -\infty$

c) Derivace $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

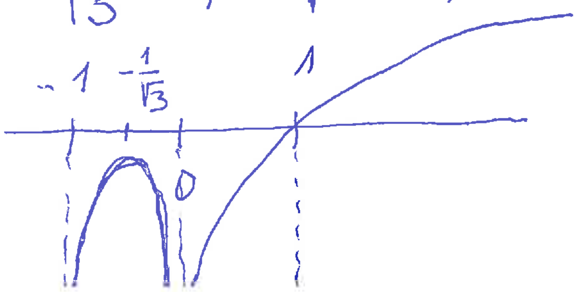
d) $f'(x) = 0$ pro $\quad x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ není v } D(f) \right)$

$f'(x) > 0$ na $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a $(1,\infty)$
zde je f rostoucí

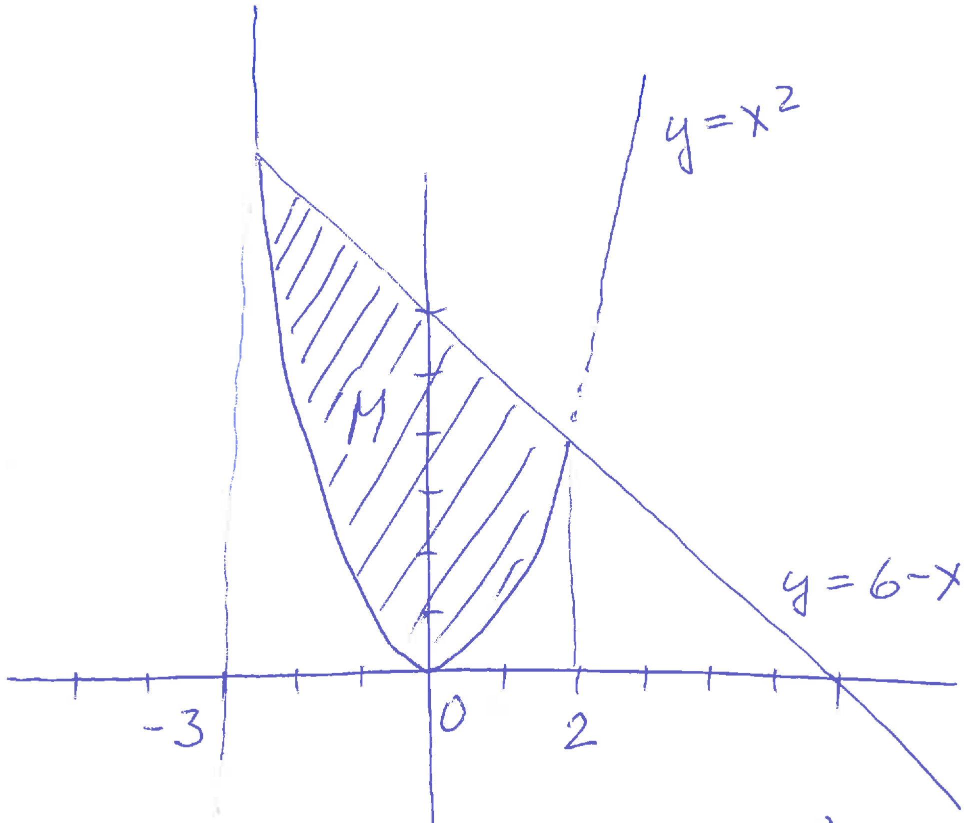
$f'(x) < 0$ na $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, f je klesající

e) f má pouze lokální maximum
v $\quad x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad f(x_0) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) < 0$

f)



Řešení 3. příkladu



$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 \le y \le 6-x\}$$

Obsah množiny M je

$$S = \int_{-3}^{2} \left((6-x) - x^2\right) dx$$ neboť čísla -3 a 2 jsou x-ové souřadnice průsečíků křivek $y = x^2$ a $y = 6-x$.

$$S = \int_{-3}^{2} (6-x-x^2)\, dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} =$$

$$= \frac{125}{6}$$

<u>Bodování</u> Výpočet průsečíků 1 bod, úplný náčrtek 2 body, integrál 1 bod, výpočet prim. funkce 1 bod, numerický výsledek 1 bod.

4. příklad – řešení

$$y' = xy^2$$

Pro $y = 0$ je řešení $y(x) \equiv 0$

Pro $y \neq 0$ počítáme

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \frac{x^2}{2} + c \qquad (1\ \text{bod})$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2+d}{2}$$

$$y(x) = \frac{-2}{x^2+d} \qquad (1\ \text{bod})$$

$$y(1) = -3 = \frac{-2}{1+d}$$

$$\frac{1+d}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow d = -\frac{1}{3} \qquad (1\ \text{bod})$$

Řešení s poč. podmínkou $y(1) = -3$

je $y(x) = \dfrac{6}{1-3x^2}$ (1 bod)

Zkouška:

$$L = y'(x) = \frac{-(-2)\cdot 2x}{(x^2+d)^2} = \frac{4x}{(x^2+d)^2}$$

$$P = xy^2 = x \cdot \frac{4}{(x^2+d)^2} = L \qquad (2\ \text{body})$$

(Při zjištění chyby 1 bod)