D. Zkouška z M1035, podzim 2022

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) definiční obor funkce $h(x) = \ln(x^2 - 2x)$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}$,

c) derivaci funkce $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, výsledek napište jako jednoduchý zlomek,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

e) objem tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le \mathrm{e}^x\}$,

f) řešení diferenciální rovnice $y' = 1$ s počáteční podmínkou $y(20) = 23$.

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 30.$$

a) Napište definiční obor a najděte limity v jeho krajních bodech.

b) Spočítejte derivaci.

c) Zjistěte, kde je funkce rostoucí a kde klesající.

d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.

e) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-5, 5]$.

f) Na jaký interval zobrazí funkce f interval $[2, \infty)$?

Příklad. 3. [6 bodů] Načrtněte obrázek množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -2x \le y \le 3 - x^2\}$$

a pomocí určitého integrálu spočtěte její obsah.

Příklad. 4. [6 bodů] Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = y^3.$$

Mezi nimi najděte to, které splňuje počáteční podmínku

$$y(1) = -2.$$

Pro obecné řešení proveďte zkoušku.

D 1. příklad

a) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

c) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + x \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\int g(x)\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} =$

$1-x^2 = y$

$-2x\,dx = dy$

(šlo také $\sqrt{1-x^2} = y$, pak $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dy$)

$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{y} + C$

$= -\sqrt{1-x^2} + C$

e) $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2\,dx = \pi \int_0^1 e^{2x}\,dx =$

$= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$

f) $y' = 1$ má řešení $y(x) = x + C$

$y(20) = 23 \Rightarrow C = 3$

$y(x) = x + 3$

D 2. příklad

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 30$$

a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{36}{x^2} + \frac{30}{x^3}\right)$$

$$= \infty \cdot 2 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2)$

c) $f'(x) > 0$ na $(-\infty, -3)$ a $(2, \infty)$

f rostoucí

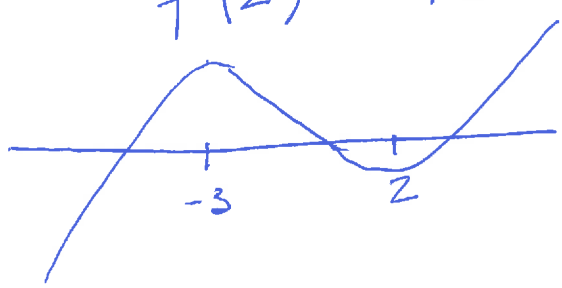
$f'(x) < 0$ na $(-3, 2)$, f klesající

d) f má lokální maximum v bodě -3, $f(-3) = -2 \cdot 27 + 27 + 36 \cdot 3 + 30$

$= 111$

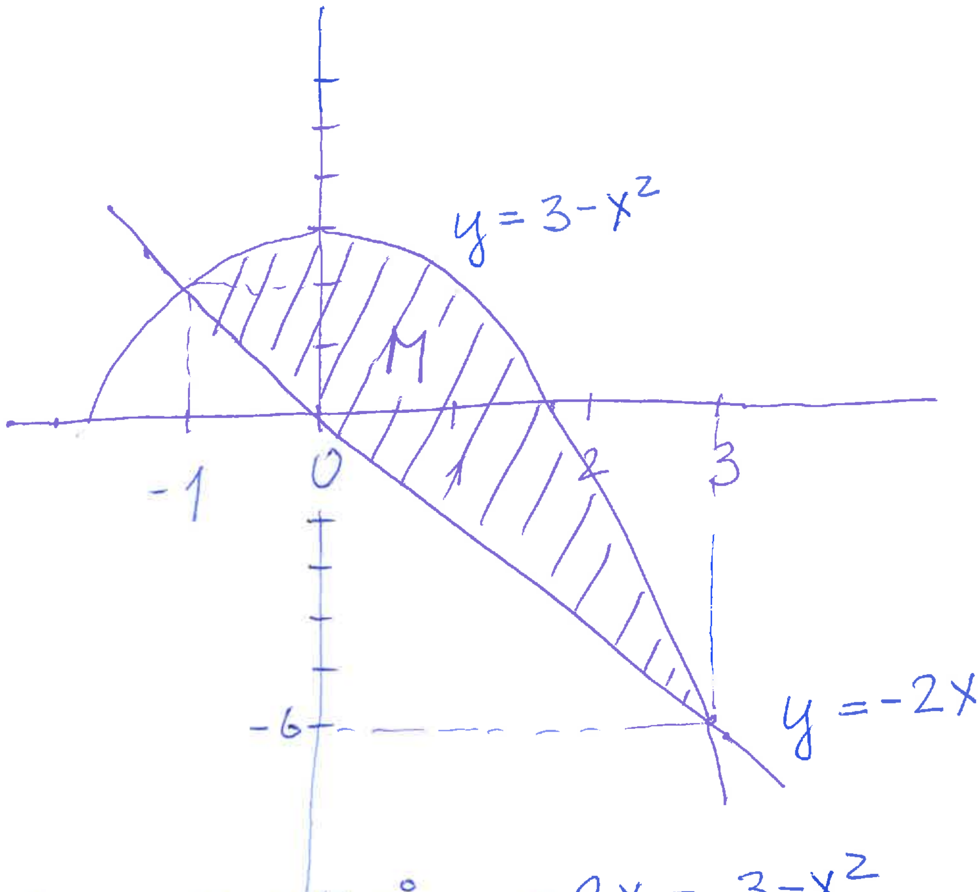
f má lokální minimum v bodě $+2$

$$f(2) = 16 + 12 - 72 + 30 = -14$$

e) 

f) $f([2, \infty)) = [-14, \infty)$

D 3. příklad



Výpočet průsečíků $\quad -2x = 3 - x^2$

$$x_{1,2} = -1, 3 \quad [1b]$$

Obrázek se správnými průsečíky [2b]

$$S = \int_{-1}^{3} \left((3 - x^2) - (-2x) \right) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^{3}$$

[1b] [1b]

$$= (9 - 9 + 9) - \left(-3 + \frac{1}{3} + 1 \right) = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1$$

[1b]

$$= \frac{32}{3}$$

D 4. příklad

$$y' = y^3$$

$$\frac{y'}{y^3} = 1$$

$$\int \frac{y'(x)}{y^3(x)}\,dx = \int 1\,dx \quad [1b]$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = x + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x + c \quad [1b]$$

$$\frac{1}{y^2} = -2x - 2c = d - 2x$$

$$y^2 = \frac{1}{d-2x}$$

$$y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{d-2x}} \quad \text{pro} \quad x < \frac{d}{2} \quad [1b]$$

$$-2 = y(1) = \frac{-1}{\sqrt{d-2\cdot 1}} \Rightarrow \sqrt{d-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{9}{4}$$

Zkouška:

$$y'(x) = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{d-2x}}\right)' = \pm \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)}{(d-2x)^{3/2}}$$

$$= \pm \frac{1}{(d-2x)^{3/2}} = y^3$$

[2b]

Pokud je řešení špatně a zkouška nevyjde pouze [1b] za závěr, že výpočet je chybný.

Řešení počáteční úlohy je

$$y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\frac{9}{4} - 2x}} = \frac{-2}{\sqrt{9-8x}} \quad [1b]$$