Cvičení 11-Diferenciální rovnice

14. prosince 2020

1 Ukázkové příklady z minulého cvičení

1. $$y'' = 0$$ $y = ax + b$

2. $$y' = y$$ $y = ce^x$

3. $$y' = y^2$$ $\int \frac{1}{y^2} = x + C \rightarrow y = -\frac{1}{x+C}$

4. $$y'' = y$$ $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

5. $$y'' = -y$$ $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

6. $$y' = xy$$ $y = c\, e^{\frac{x^2}{2}}$

Dif rovnice: 1 řád: $F(x, y, y') = 0$

n-řád: $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

rozřešené vzhledem k derivaci: $y' + f(x, y) = 0$

2 Separace proměnných

Definice

Diferenciální rovnice jsou rovnice kde funkce $f(x) = y(x)$ je neznámá, v těchto rovnicích se mohou vyskytovat jiné funkce $g(x)$ a také derivace neznámé funkce $f'(x)$ a $f''(x)$.
První typ rovnice jsou rovnice tvaru:

$$y'(x) = g(x)h(y)$$

kde g a h jsou libovolné (diferencovatelné funkce). Využijeme toho, že $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a rovnice lze tedy převést do tvaru.

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \to \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x$$

Rovnice můžeme tedy vyřešit známe-li integrály z funkcí g, h.
Závislost na bodech proměnné x se nepíše a píšeme tedy pouze y a y'.

2.1 Základní příklady

1. Vyřešte počáteční úlohu $y' + 2y - y^2 = 0$, $y(0) = 1$.
2. Vyřešte počáteční úlohu $xy' = 2y$, $y(1) = \frac{1}{2}$.
3. Vyřešte úlohu $y' = \ln x^y$. • zkuste
4. Vyřešte úlohu $y' = \cos y$.

2.2 Převod na separovatelné proměnné

Vhodnou substitucí převeďte následující rovnice na rovnice se separovatelnými proměnnými a vyřešte

1. $$2xy' = y + x$$
2. $$y' = \cos(x - y)$$
3. $$y' = (y + x)^2$$
4. $$y' = -\frac{x + y}{x}$$

5.

$$y' = \frac{1 - 3x + 3y}{1 + x + y}$$

6.

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

2.3 V "diferenciálním"tvaru

Rovnice mohou být také v tomto tvaru

1.

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$

.

2.

$$\left(xy^2 + x\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 y - y\right) \mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 1$$

3.

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x$$

3 Lineární a Bernouliho rovnice

Metody řešení lineárních rovnic

Lineární jsou rovnice tvaru $y' = a(x)y + b(x)$, které se dále dělí na homogenní $b = 0$ a nehomogenní $b \neq 0$. Díky faktu, že lineární kombinace řešení $c_1 y_1 + c_2 y_2$ je také řešení máme speciální postup řešení nehomogenních rovnic:

- Vyřešíme homogenní část rovnice $y' = a(x)y$, pomocí separace proměnných. Toto řešení je $y = Ce^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$. Nyní potřebujeme získat partikulární řešení nehomogenní rovnice:
- **Metoda 1 : variace konstant**

  Místo konstanty C v řešení budeme psát funkcí $C = C(x)$ dosadíme do rovnice a dostaneme rovnici pro C', kterou můžeme zintegrovat a dostat obecné řešení.
- **Metoda 2 : integrační faktor**

  Začneme s rovnicí $y' = a(x)y + b(x)$, tu vynásobíme integračním faktorem což je $\mu(x) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$. Dostaneme

$$\left(y' - ay\right) \mu = b\mu$$

$$(y\mu)' = b\mu \to y\mu = \int b\mu \,\mathrm{d}x$$

3.1 Řešení lineárních rovnic

Použijte obě metody k vyřešení následujících rovnic.

1. $$y' = y + x$$

2. $$y' = y \tan x + \cos x$$

Bernouliho rovnice

Jedná se o rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)y^r$$

Řešíme jí substitucí $z = y^{1-r}$. Protože poté rovnice přejde na tvar

$$z' = (1-r)a(x)z + (1-r)b(x)$$

Což je nehomogenní lineární rovnice

Vyřešte

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

4 Slovní úlohy

Typy příkladů

Následující problémy/fyzikální úlohy vedou na řešení diferenciálních rovnice

- Radioaktivní rozpad, rozmnožování v populaci, výměna tepla, míchání látek

$$y' = \pm ay$$

4.1 Základní úlohy

Viz. přednáška či sbírka

4.2 Pokročilejší Úlohy

- **Děravý válec.**

Máte válec o poloměru R, v němž je nalita voda do výšky $h0$. V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r, takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný?

- **Základní modelace epidemie koronaviru**

  Zaměříme se na určitý uzavřený počet lidí N, například, České republika, předpokládáme tedy že nikdo necestuje. Počet nakažených označíme x, jedná se o funkcí v závislosti na čase $x = x(t)$, řekněme, že v čase $t = 0$ byl počet nakažených x_0. Jak se vyvíjí počet nakažených v čase a jakým způsobem se tento vývoj dá zbrzdit?

- **Metoda diferenciálů** Nádrž obsahuje 100 litrů roztoku, který obsahuje 10 kg soli. Do nádrže naléváme vodu, rychlostí 3 litry za minutu. A výsledný roztok vytéká rychlostí 2 litry za minutu. Pravidelným mícháním zaručujeme, že koncentrace zůstává stejná. Kolik soli zbyve v nádrži po jedná hodině?

5 Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci

Ukážeme si ukázkový příklad.

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}$$

6 Rovnice druhého řádu

Charakteristický polynom

Máme rovnici

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Prvně řešíme homogenní rovnici, řešení závisí na kořenech charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Pokud tato kvadratické rovnice má dvě různá řešení pak, řešení homogenní rovnice je tvaru

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Pokud má kvadratické rovnice dvojnásobný kořen, pak je řešení homogenní rovnice tvaru

$$y = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$$

6.1 Ukázkové příklady

- $$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

- $$y'' + 3y' - 4y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$
- $$y'' + y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

11. cvičení – ukázkové příklady:

2.1.1 $y' + 2y - y^2 = 0$, s podmínkou $y(0) = 1$

separace $\rightarrow$ $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y \rightarrow \frac{1}{y^2 - 2y}\,dy = dx \quad \Big/ \int$$

$$\int \frac{1}{y(y-2)}\,dy = x + C \quad \rightarrow \text{parciální zlomky}$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \int -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2(y-2)}\,dy = x + C$$

$$-\frac{1}{2}\ln y + \frac{1}{2}\ln(y-2) = x + C \quad \Big/ \cdot 2$$

$$\ln\frac{y-2}{y} = 2x + C$$

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{2x}$$

$$1 - \frac{2}{y} = Ce^{2x}$$

$$y = \frac{2}{1-ce^{2x}}$$

- počáteční podmínka : $y(0)=1$

$$1 = \frac{2}{1-C}$$

$$\Rightarrow C = -1$$

řešení $\boxed{y = \frac{2}{1+e^{2x}}}$

kontrola $y' - 2y + y^2 = 0$

$$LS = -\frac{2}{(1+e^{2x})^2} \cdot 2e^{2x} - \frac{4}{(1+e^{2x})} + \frac{4}{(1+e^{2x})^2}$$

$$= \frac{-4e^{2x} - 4(1+e^{2x}) + 4}{(1+e^{2x})^2} = 0 = PS \checkmark$$

2.12

$xy' = 2y$ a $y(1) = \frac{1}{2}$

-> separace : $x\frac{dy}{dx} = 2y \rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \quad \Big| \int$

$e^{\frac{1}{2}\ln y} = xC$

$$\frac{1}{2}\ln y = \ln x + c \rightarrow \sqrt{y} = cx$$

$$y = cx^2, \; y(1) = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2} \rightarrow$$

řešení $\boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$

kontrola $LS = xy' = x \cdot \frac{2x}{2} = x^2$

$PS = 2y = x^2 = LS$

2.1.4

$y' = \cos y \rightarrow$ separace $\frac{dy}{\cos y} = dx$

$$\int \frac{1}{\cos y}\, dy = \ln\left(\tan y + \frac{1}{\cos y}\right)$$

$$\ln\left(\tan y + \frac{1}{\cos y}\right) = x + C$$

$$\tan y + \frac{1}{\cos y} = ce^x$$

$\rightsquigarrow$ lze dopočítat

$$y = 2\arctan\left(\tanh\left(\frac{1}{2}(c+x)\right)\right)$$

2.2 Převod na separovatelné

2.2.1 $xy' = x + y$

je homogenní rovnice, podělme x

$y' = 1 + \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$ $\qquad y \to u$

$u = u(x)$

Substituce $u = \frac{y}{x} \to y = ux$ a $y' = u + u'x$

rovnice přejde na

$\cancel{u} + u'x = 1 + \cancel{u} \to u'x = 1$, $du = \frac{1}{x} dx$

$u = \ln x + c \to \frac{y}{x} = \ln x + C \to \underline{\underline{y = x \ln x + cx}}$

2.2.2

$y' = \cos(x-y) = \cos(y-x)$ $\left(y' = f(ax+by+c) \right.$

substituce $y - x = u \to y' - 1 = u'$ $\quad \left. u = ax+by+c \right)$

$1 + u' = \cos(u) \to$ separace $\frac{du}{\cos u - 1} = dx$

$\cot g \frac{u}{2} = x + C$

$\frac{u}{2} = \cot g^{-1}(x+c) \to$ $\underline{y = 2 \operatorname{arc} tg (x+C) + x}$

2.1.4 $y' = -\frac{x+y}{x}$; je speciálního typu

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right) \rightsquigarrow$$

lze převést na homogenní → rce $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y' = -\frac{x+y}{x} = -1 - \frac{y}{x}$$

substituce $y = ux$, $y' = u + u'x$

$u + u'x = -1 - u$ → separace $\frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{2}\ln(1+2u) = -\ln x + C$$

$$\sqrt{1+2u} = \frac{C}{x}$$

$$1 + 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}$$

$$x + 2y = \frac{C}{x} \to \underline{y = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{x} - x\right)}$$

teď máme 2 příklady typu: $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

ty řešíme substitucí $x = v + m$, $y = v + h$ tak aby zmizely nové absolutní členy →

2.2.5 $$y' = \frac{1-3x+3y}{1+x+y}$$

$x = u+m,\ y = v+n \rightarrow 1-3(u+m)+3(v+n)$ čitatel

$\rightarrow 1-3m+3n = 0$

$1+m+n = 0$ jmenovatel

řešení $\rightarrow$ $m = -\frac{1}{3}$

$n = -\frac{2}{3}$ $\rightarrow x = u-\frac{1}{3},\ y = v-\frac{2}{3}$

rovnice tedy přejde na

$$v' = \frac{-3u+3v}{u+v},$$ což je homogenní rovnice

$$v' = \frac{-3+3\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$$ další substituce $\frac{v}{u} = s$

$v' = s+s'u$

$$s+s'u = \frac{-3+3s}{1+s}$$

$$s'u = \frac{-3+3s-s(1+s)}{1+s}$$

separace proměnných

$$\frac{1+s}{-3+3s-s(1+s)}\,ds = \frac{1}{u}\,du$$

$$\ln u + c = -\frac{1}{2}\ln(s^2-2s+3) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{s-1}{\sqrt{2}}\right)$$

musíme vrátit substituce zpět

$s = \frac{v}{u},\ u = x+\frac{1}{3},\ v = y+\frac{2}{3}$

dostaneme $y(x)$. $\quad y' = f\left(\frac{ax+by+d}{Ax+By+C}\right)$

2.26

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+4y+2}{2x+4y+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2x+4y+3}\right)$$

nyní je substituce jasná $\quad 2x+4y+3 = v$

$$2+4y' = v'$$

$$\rightarrow \quad y' = \frac{v'-2}{4}$$

rovnice přejde na

$$\frac{v'-2}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{v'}{4} = 1 - \frac{1}{2v}$$

separace proměnných

$$\frac{dv}{4\left(1-\frac{1}{2v}\right)} = dx \rightarrow \frac{1}{8}\left(2v + \ln(2v-1)\right) = x + C$$

vrátíme substituci $\quad \frac{1}{8}\left(4x+8y+6+\ln(4x+8y+5)\right)$

$= x + C \rightsquigarrow$ vyjádřit $\underline{y = y(x)}$

2.3 rovnice v diferenciálním tvaru

2.3.1 $x\,dx + y\,dy = 0 \rightarrow$

$x\,dx = -y\,dy \quad / \int$

$x^2 + C = -y^2 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = r^2 \text{ kružnice}}$

2.3.2

$(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0 \qquad y(0) = 1$

musíme separovat proměnné

$x(y^2+1)\,dx + y(x^2-1)\,dy = 0$

$x(y^2+1)\,dx = y(1-x^2)\,dy$

$\frac{x}{1-x^2}\,dx = \frac{y}{y^2+1}\,dy \quad / \int$

$C - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

$\frac{C}{1-x^2} = 1 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{C}{1-x^2} - 1}$

2.3.3

$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

$x\,dy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx \quad / \frac{1}{x\,dx}$

$$y' = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) \rightarrow \text{homogenní rovnice}$$

$$u + u'x = u + \sqrt{1+u^2}$$

$$u'x = \sqrt{1+u^2} \rightarrow \text{separace}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}dx$$

$$\sinh^{-1}(u) = \ln x + c$$

$$\underline{y = x\sinh(\ln x + c)}$$

3. Lineární rovnice

$$y' = a(x)y + b(x)$$

3.1.1 $\boxed{y' = y + x}$

1) metoda variace konstant

- vyřešíme homogenní rovnici $y' = y$

y_H $\quad y = ce^x \rightarrow$ variace konstant: $c \rightarrow c(x)$

hledání $c(x)$: $y' = y + x \rightarrow \cancel{ce^x} + c'e^x = \cancel{ce^x} + x$

$y = ce^x \rightarrow y = c(x)e^x$

$\rightarrow c' = x e^{-x} \quad , \quad c = \int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + D$

celkově tedy: $y = (-e^{-x}(x+1) + D)\, e^{x}$

$$y = -(x+1) + D\, e^{x}$$

2) Integrační faktor

$e^{-\int a(x) dx}$

$y' = y + x$

$y' - y = x \quad \Big| \cdot \quad e^{-\int 1 dx} = e^{-x}$

$(y' - y)\, e^{-x} = x e^{-x}$

$\stackrel{?}{=} (y e^{-x})' = y' e^{-x} - y e^{-x}$ ano sedí ✓

$\Rightarrow (y e^{-x})' = x e^{-x} \quad \Big| \int dx$

$y e^{-x} = -e^{-x}(x+1) + C$

$$y = C e^{x} - (x+1)$$

3.1.2 $y' = y\tan x + \cos x$

1) metoda variace konstant

$y' = y\tan x$ → separace → $\frac{dy}{y} = \tan x\,dx$

$\ln y = -\ln(\cos x) + C$

$$\boxed{y = \frac{C}{\cos x}}$$

variace konstant $C \to C(x)$

$y' = y\tan x + \cos x$

$$\frac{C'}{\cos x} + \cancel{\frac{C\sin x}{\cos^2 x}} = \cancel{\frac{C}{\cos x}\tan x} + \cos x$$

$$C' = \cos^2 x \to C = \int \cos^2 x\,dx$$

$$C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + D$$

$$\to y = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + D\right)$$

2) Integrační faktor

$\frac{\sin x}{\cos x}$

$$y' - y\tan x = \cos x \quad \Big|\cdot e^{-\int \tan x\,dx} = e^{+\ln(\cos x)} = \cos x$$

$$(y' - y\tan x)\cos x = \cos^2 x$$

$$(y\cos x)' = \cos^2 x$$

$$y\cos x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$y = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)$$

3.2 Bernouliho rovnice

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y} \quad ; \quad y' = a(x)y + b(x)\cdot y^r$$

$$z = y^{1-r}$$

Podle návodu: $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{x}\dfrac{y}{\sqrt{y}} + x$

$$z = \sqrt{y} \rightarrow z' = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{y'}{\sqrt{y}}$$

$2z' = \dfrac{4}{x}\cdot z + x$ což je lineární rovnice

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2} \quad \Big| \quad e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(z\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{2x}$$

kontrola: $\left(z\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{z'}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}z$ ✓

→ dostaneme

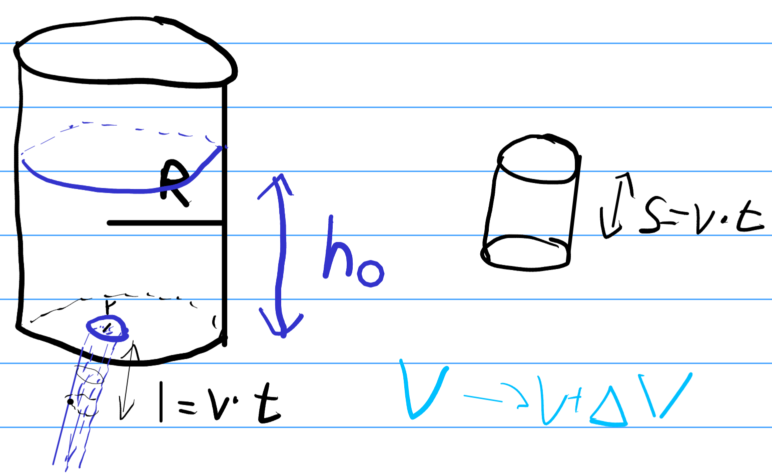
$$\frac{z}{x^2} = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x + C$$

$$z = \frac{x^2}{2}\ln x + x^2 C$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{2}\ln x + x^2 c \to \underline{y = \left(\frac{x^2}{2}\ln x + x^2 C\right)^2}$$

4. Slovní úlohy

4.1 Děravý válec



závislost výšky hladiny h na čase?

V $t = 0$ $h = h_0$

rychlost vytékání
$v = \sqrt{2gh}$

vzdálenost l

objemový odtok vody: $\pi r^2 (v \cdot t)$

infinitesimální změna objemu: $\boxed{dV = -\pi r^2 v\,dt}$

$= -\pi r^2 \sqrt{2gh}\,dt$, $(-)$ protože voda odtéká

Jak změna objemu ovlivní hladinu?

objem válce: $V = \pi R^2 h \Rightarrow dV = \pi R^2 dh$

získáme diferenciální rovnici

$$\pi R^2 dh = -\pi r^2 \sqrt{2gh}\, dt$$

což je rovnice pro $h(t)$

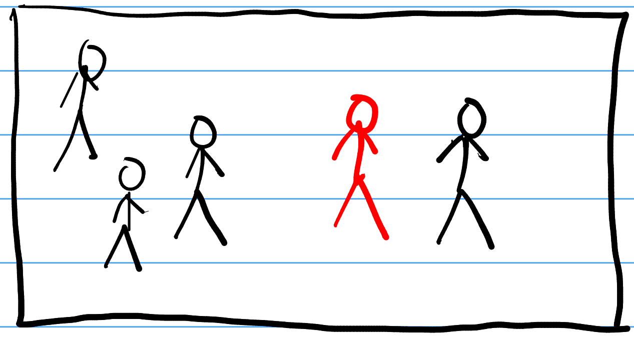
$\rightarrow$ separace: $$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\, dt$$

$$\sqrt{h} = C - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t$$

v čase $t=0$ bylo $h = h_0 \Rightarrow C = \sqrt{h_0}$

$$\rightarrow h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\, t\right)^2$$

4.2 Koronavirus



N lidí

v čase t_0 je nakaže-
ných x_0

jaký je vývoj počtu
nakažených v čase?

→ Jaká je časová změna počtu nakažených?

$\frac{dx}{dt} \sim ?$ pro $x \ll N$ určitě $\frac{dx}{dt} \sim x$

ale pro $x \sim N$ je $\frac{dx}{dt}$ malé nebo záporné

→ $\frac{dx}{dt} \sim x(N-x)$

nakažení zdravý

řešíme rovnici $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = k\,x(N-x)$

→ separace $\frac{dx}{x(N-x)} = k\,dt$

$$\frac{\ln x - \ln(N-x)}{N} = kt + C$$

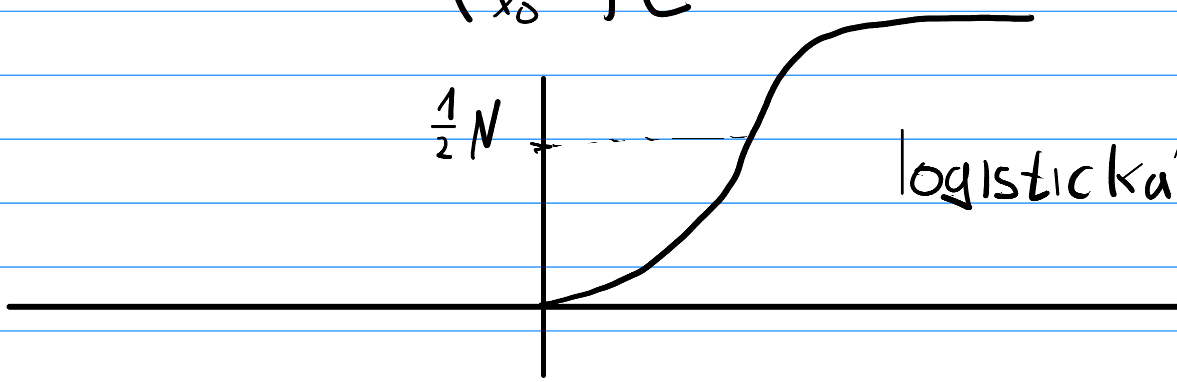
určíme c, v $t=t_0$ $x=x_0$

$$c = \frac{1}{N} \ln \frac{x_0}{N-x_0}$$

$$\rightarrow \ln \frac{x}{N-x} = N\ell t + \ln \frac{x_0}{N-x_0}$$

$$\frac{x}{N-x} = e^{N\ell t} \frac{x_0}{N-x_0}$$

$$\rightsquigarrow \quad x = \frac{N}{1+\left(\frac{N}{x_0}-1\right) e^{N\ell t}}$$



logistická funkce

Toto byla logistická rovnice

4.3

metoda diferenciálů

$\rightarrow$ podobná jako úloha 4.1

koncentrace $\frac{\text{množství}}{\text{objem}} = c$

vývoj množství soli : $x(t)$ v kg

za čas t minut bude v nádrži $100+t$

litrů (100 na začátku +3 přitéká
-2 odtéká)

Koncentrace roztoku: $c(t) = \frac{x(t)}{100+t}$

změna díky odtékání:

za čas dt $2 \cdot dt$ litrů odteče

v množství (kg) je to $2c\,dt$

$\Rightarrow$ změna v x : $dx = -2c\,dt = -\frac{2x}{100+t}dt$

$\rightarrow \ln x = -2\ln(100+t) + C$

$$x = \frac{c}{(100+t)^2}$$

když $t=0$ $x=10$ $\rightsquigarrow$ $c=100$

po jedné hodině $X(60) = \frac{100}{160^2} = 3.9\text{ kg}$

5. Rovnice nerozhřešené vzhledem k derivaci

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'}$$

- metoda parametru $y' = p$, $x = x(p)$, $y = y(p)$

$\boxed{y = 2xp + \frac{1}{p}}$ ⇝ derivujte podle x

$$y' = 2p + 2xp' - \frac{1}{p^2}p'$$

$$p = 2p + 2xp' - \frac{1}{p^2}p'$$ → lineární rovnice

$$p' = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}$$

řešení $x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C)$

$y = 2xp + \frac{1}{p}$

} parametrické řešení

5. Rovnice druhého řádu

$\boxed{y'' + ay' + y = f(x)}$

5.1 $$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. charakteristický polynom

$y = ce^{\lambda x} + dxe^{\lambda x}$ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

dvojnásobný

→ řešení homo rce:

$$y = c\underbrace{e^x}_{y_1} + d\underbrace{xe^x}_{y_2}$$

2. variace konstant k řešení nehomo

$$\boxed{\begin{aligned} c'e^x + d'xe^x &= 0 \\ c'e^x + d'(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x^2+1} \end{aligned}}$$

Kramerovo pravidlo:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{e^x}{x^2+1} \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{x^2+1}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2+1} \qquad c' = \frac{|W_1|}{|W|} \quad d' = \frac{|W_2|}{|W|}$$

$$c(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$d(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \arctan x + d$$

$$\Rightarrow y = y_H + y_{NH} = ce^x + dxe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(x^2+1) + xe^x\arctan x$$

Pozn: kvazipolynomiální pravá strana

$$y'' + ay' + by = e^{Ax}\left[P(x)\cos Bx + Q(x)\sin Bx\right]$$

hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = x^r e^{Ax}\left[A(x)\cos Bx + B(x)\sin Bx\right]$

$r+1$ - násobnost kořene $A+Bi$

$A(x), B(x)$ polynomi stupně $\max\{st P, st Q\}$

sbírka 1.9.16

$$y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}\sin x$$

homo část: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$\rightarrow y_H = c_1 e^{x}\cos 2x + c_2 e^{x}\sin 2x + y_p(x)$

PS je kvazipolynom:

tedy typneme $y_p = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$

$y_p' = e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x)$

$y_p'' = e^{2x}(4A\sin x + 4B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x$
$\quad - A\sin x - B\cos x)$

dosazením do rovnice $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}\sin x$

$\rightarrow$ porovnáme koeficienty

$$\rightarrow \begin{array}{ll} 4A - 2B = 5 & e^{2x}\sin x \\ 2A + 4B = 0 & e^{2x}\cos x \end{array}$$

$\rightarrow y_p = e^{2x}(\sin x - \frac{1}{2}\cos x).$