Cvičení 13-Diferenciální rovnice 3

10. ledna 2021

Věci k řešení z google tabulky:

- Parciální zlomky.
- Řešení differenicálních rovnice.
- Sestavování differenciálních rovnice ze slovních úloh.
- Řešení ukázkové písemky.

1 Parciální zlomky

- Probírané ve cvičení 9.
- chceme integrovat funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy.

1) jednoduchý příklad na ukázku:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx;$$ $\frac{1}{1-x^2}$ integrovat neumím, ale $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1+x}$ což je rozklad polynomu $1-x^2$ integrovat umím $\to$ $-\ln|1-x|$ a $\ln|1+x|$

Já předpokládám, že lze udělat rozklad:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}, \quad \text{kde } A, B \text{ neznámé}$$

snadno je ale dopočítám: $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}$

$\Rightarrow$ z rce $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}$

dostaneme rovnice pro A, B

$$1 = A(1+x) + B(1-x)$$

$$1 = A + Ax + B - Bx$$

A, B jsou konstanty ne funkce $\rightarrow$ řešíme porovnáním koeficientů

$$u\ x^0: \quad 1 = A + B$$

$$u\ x^1: \quad 0 = A - B \quad \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

a $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$

Obecný postup:

problém: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

1) je-li stupeň polynomu $P(x)$ vyšší nebo stejný jako $Q(x)$
pak musíme polynomy podělit

Př: $\int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6} = \int \frac{x(x^2+5x+6)-5x^2-6x+1}{x^2+5x+6}$

$= \int x + \frac{-5x^2-6x+1}{x^2+5x+6} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-5(x^2+5x+6)}{x^2+5x+6} +$

$+ \frac{19x+31}{x^2+5x+6} = \frac{x^2}{2} + \int -5 + \frac{19x+31}{x^2+5x+6}.$

2) rozložit $Q(x)$ tedy polynom ve jmenovateli na kořenové součinitele

$\Rightarrow$ vyřešit $Q(x)=0 \Rightarrow$ najít $x_1, x_2, \ldots,$ kořeny

je-li x_m kořen: 1) reálný s násobností k
tedy $Q(x) = \ldots (x-x_m)^k \ldots$

a $\frac{P(x)}{Q(x)} = \ldots + \frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3}$ až do $\frac{\text{něco}}{(x-x_0)^k}$

nebo máme li kořen komplexní necháme součinitel ve tvaru x^2+ax+b a rozklad

$$\frac{P(x)}{x^2+ax+b} = \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$

samozřejmě více je-li násobnost vyšší.

3) provedeme převedení na společný jmenovatel a vyřešíme rovnice pro koeficienty, porovnáním výrazů u $x^0, x^1, \ldots$

Př pokračování
$$\frac{19x+31}{x^2+5x+6}$$

1) $x^2+5x+6=0$

$x_{1,2} = -2, -3$

$\Rightarrow x^2+5x+6 = (x+2)\cdot(x+3)$

2) $$\frac{19x+31}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

3) $$-\|- = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow \quad 19x+31 = Ax+3A+Bx+2B$$

x^0: $31 = 3A+2B$

x^1: $19 = A+B$

řešení soustavy 1. rce − 2x druhá:

$$31-38 = 3A-2A \Rightarrow \quad A=-7$$
$$B = 19-(-7) = 26$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}\,dx = \frac{x^2}{2} - 5x + \int \frac{-7}{x+2} + \frac{26}{x+3}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 5x - 7\ln|x+2| + 26\ln|x+3| + K$$

ostatní typy příkladů viz cvičení.

2 Řešení diferenciálních rovnic

- obecná rovnice $F(x, y(x), y'(x), y''(x) \ldots) = 0$
- řešení různé podle typu rovnice:

Typy: 1) separovatelné

• cvičení 11. sekce 2

rovnice typu $y'(x) = g(x)h(y)$

řeší se separací $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \mid \int$

Příklad cvičení a. 2.1.3

$$y' = \ln x^y = y \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln x \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \ln x \, dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x \, dx$$

Korektně: $\ln|y| + c_1 = x\ln x - x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

označme $c = c_2 - c_1$

$$\ln|y| = x\ln x - x + c \quad \Big| \, e$$

$$|y| = e^{x\ln x - x + c} = e^{x\ln x} \cdot e^{-x} \cdot e^{c}$$

označme $e^{c} = D$, $D \in (0, \infty)$! ale máme $|y|$

$$|y| = \pm y$$

$$\Rightarrow y = \pm D e^{x\ln x} \cdot e^{-x}$$

označme $K = \pm D$
$K \in \mathbb{R}$

$$y = K e^{x\ln x} e^{-x} = K e^{\ln x^x} e^{-x}$$

$$\underline{y = x^x e^{-x}}$$

důležité: kontrola zda $y' = \ln x^y$ nechám na vás

2) rovnice, které lze převést na separovatelné

Př: homogenní fce: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

substituce $u = \frac{y}{x}$, $y' = u + u'x$
rovnice přejde na separovatelnou

další příklady

- $y' = f(ax+by+c)$
- $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$
- $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+D}\right)$

$\Rightarrow$ substituce viz cvičení 11.

3) lineární rovnice

A) homogenní:

rovnice typu $y' = a(x)y + b(x)$

homogenní znamená, že $b(x) = 0$

$\Rightarrow$ fce $y' = a(x)y$ lze řešit separací

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Rightarrow y = e^{\int a(x)dx}$$

B) nehomogenní

- co dělat, když $b \neq 0$? $\Rightarrow$ 2 možnosti

I Integrační faktor

$$y' = a(x)y + b(x) \,/\, e^{-\int a(x)dx}$$

$$y'\cdot e^{-\int a(x)dx} - e^{-\int a(x)dx}a(x)y = e^{-\int a(x)dx}b(x)$$

Proč jsme si pomohly?? protože lze zapsat jako

$$\left(y\cdot e^{-\int a(x)dx}\right)',$$ ověřme:

$$\left(y\cdot e^{-\int a(x)dx}\right)' = y' e^{-\int a(x)dx} + y\cdot\left(e^{-\int a(x)dx}\right)'$$

$$= y\cdot e^{-\int a(x)dx} + y\, e^{-\int a(x)dx}\underbrace{\left(-\int a(x)dx\right)'}_{=-a(x)}$$

z definice neurčitého integrálu!

zkuste sami pochopit!

rovnici pak vyřešíme integrací

druhý způsob

II variace konstant

$$y' = a(x)y + b(x)$$

- vyřešíme nehomogenní část $y' = a(x)\cdot y$

řešení napíšeme jako $y_H = e^{\int a(x)dx}$

• hledáme 1 funkci $y_P(x)$, která řeší nehomogení rovnici

to děláme variací konstant

$C \to C(x)$ a dosadíme do

$y' = a(x)y + b(x)$ a dostaneme separovatelnou fci pro $C(x)$.

$C(x) =$ nejaká funkce + $C =$ pravá konstanta

Celkové řešení je y_H s tím že za C dosadíme $C(x)$ poté se řešení rozpadne na $y_H + y_P$.

Př:

$$y' = xy + x$$

1) řeším nehomogení rovnici $y' = xy$

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ což opravdu je $e^{\int a(x)dx}$ ✓

2) variací konstant vyřeším nehomogení fci

$$y' = xy + x$$

$y = ce^{\frac{x^2}{2}},\ c \in R \Rightarrow y = c(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ kde $c(x)$ je neznámá funkce, taková, že

toto je řešení rce $y' = xy + x$

$$y' = c'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + c(x)\cdot x e^{\frac{x^2}{2}}$$

$\Rightarrow$ rce $\rightarrow$ $c'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + \cancel{c(x)xe^{\frac{x^2}{2}}} = \cancel{x\cdot c(x)e^{\frac{x^2}{2}}} + x$

toto se vždy odečte!

$$c'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow c(x) = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

substituce $-\frac{x^2}{2} = v \Rightarrow c(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C,\ C \in R$

$\rightarrow$ dosadíme zpět do $y = c(x)e^{\frac{x^2}{2}}$

$$y = -1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

kontrola: $y' = -cxe^{-\frac{x^2}{2}} = x(-1+ce^{-\frac{x^2}{2}}) + x$

sedí ✓

4) Rovnice vyšších řádu

- obsahují vyšší derivace $y'', y''', y^{(4)}$...

- s konstantími koeficienty:

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = f(x).$$

Jak řešit??

znovu prvně řešíme homogenní část $f(x)=0$.

a jak? tipneme výsledek jako

$$y_H = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots$$

zjistíme že tento tip je správně pokud platí

$$\lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 = 0 \quad (*)$$

charakteristický polynom rovnice.

Ve skutečnosti prvně řešíme (*) a pak podle řešení sestavíme y_H takto: 1) je-li λ reálný kořen pak $c\, e^{\lambda x}$ je řešení

2) je-li λ vícenásobný kořen pak $c_1 e^{\lambda x}$, $c_2 x e^{\lambda x}$, $c_3 x^2 e^{\lambda x}$ jsou řešení

3) je-li $\lambda = A \pm iB$

pak je řešení tvaru $c\, e^{Ax}\cos Bx + d\, e^{Ax}\sin Bx$

$\Rightarrow$ Vyřešme charactristickou rci, pak podle kořenů sestavme y_H, kde bude tolik konstant jaký je řád rovnice

$\Rightarrow$ Pak řešíme nehomogenní část s $f(x) \neq 0$

a to buď < variací konstant / speciální pravá strana

- Variace konstant: všechny konstanty pozvedneme na funkce $c \to c(x)$

$$c_1' y_1(x) + \dots + c_n' y_n(x) = 0$$
$$c_1' y_1'(x) + \dots + c_n' y_n'(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

Soustavu vyřešíme pro $c_1', \dots, c_n'$ a zintegrujeme abychom dostali $c_1, \dots, c_n$ $\to$ dosadíme do y a dostaneme řešení které se samo rozpadne na $y_H + y_P$.

- Metoda speciální pravé strany

! lze použít pouze někdy !

je-li $p(x) = e^{Ax}(P(x)\cos Bx + Q(x)\sin Bx)$

pak nemusíme dělat variaci konstant, ale stačí najít jedno řešení y_p nehomogenní rovnice, celkové řešení pak bude $y_H + y_p$.

y_p hledáme ve tvaru

$$y_p = x^r(A(x)\cos B + B(x)\sin Bx)$$

kde A, B jsou polynomy s neznámými koeficienty stejného stupně jako $\max\{st\,P(x), st\,Q(x)\}$

a r je násobnost kořene $A \pm iB$

=> ukázka na příkladu:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$$

1) homo: $y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ $\quad \Delta = 4 - 8 = -4$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow y_H = c e^x \cos x + d e^x \sin x$

2) nehomo: pravá strana je tvaru kvazipolynomu s $A = 1, B = 1, P(x) = 1, Q(x) = 0$

tipneme $y_p = x^r e^x (A\cos x + B\sin x)$ kde r je násobnost kořene $A \pm iB$ což je 1. (pozor ve většině případů bude $r = 0$)

$y_p = x e^x (A\cos x + B\sin x)$ naším úkolem je teď najít A, B takové, že y_p řeší $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$

$$y_p' = e^x(A\cos x + B\sin x) + y_p + xe^x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_p'' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) + y_p'$$
$$+ e^x(-A\sin x + B\cos x) + xe^x(-A\sin x + B\cos x) - y_p$$

tedy $y_p'' - 2y_p' + 2y_p = e^x \cos x$

$$\cancel{e^x}(A\cos x + B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - Ax\sin x + Bx\cos x$$
$$- A\cos x - B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x) = \cancel{e^x}\cos x$$

koeficienty u $x\cos x$: $0 = 0$ ✓

$x\sin x$: $0 = 0$ ✓

$\cos x$: $2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$\sin x$: $-2A = 0$ $\quad A = 0$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} x e^x \sin x$ a $y = y_H + y_p = ce^x\cos x + de^x \sin x + \frac{1}{2} x e^x \sin x$

3 Sestavování diferenciálních rovnic ze slovních úloh

3.1 Základní typy úloh

Jak nad tím přemýšlet.

Dobrý postup je v zadaní najít tři hlavní věci a to

1. Co je neznámá funkce, pro kterou máte rovnici sestavit. Většinou závislost nějaké proměnné na čase.
2. V zadaní buď bude nebo se ze zadaní dá najít nějaký vztah pro **změnu** této funkce, protože si pamatujeme definici derivace víme, že změna této funkce je její derivace. Pochopením toho co je o změně napsané v zadání můžeme pak rovnou sestavit diferenciální rovnici.
3. Všimnout si počátečních podmínek v zadaní, víme, že k úplnému řešení diferenciálních rovnice potřebujeme počáteční podmínky, které nám umožní zjistit neznámé konstanty.

Nyní si ukážeme základní typy úloh a to příklady na: růst/učení, výměnu tepla, míchání látek a radioaktivní rozpad (měli byste znát z přednášky na diferenciální rovnice konkrétně slidy 52-64, k úplnému pochopení důrazně doporučuji si přednášku projít.) Tyto fyzikální procesy/problémy jsou dobré v tom, že existují zákony/vztahy které spojují změnu této veličiny s veličinou samotnou.

1. **Výměna tepla**:

   Za jaký čas se těleso o teplotě $100°$ zchladí na teplotu $30°$ je-li umístěno do místnosti s pokojovou teplotou $20°$ a všimli jste si, že za 20 minut se těleso zchladilo na $60°$.

   Nápověda: Postupujeme podle návodu za 1) Co je funkce kterou máme zjistit, zde je to doufám jasné že se jedná o funkci závislosti teploty tělesa na čase, řekněme že ji označíme $\Phi(t)$ (podle konvence přednášky). Za 2) Jaký je vzorec pro změnu této veličiny a na čem tato závisí, zde prvně použijeme intuici dáme-li horké těleso do chladné místnosti tak víme že jeho teplota bude ubývat (změna bude záporná), také si můžeme představit, že čím je teplotní rozdíl větší tím rychlejší bude změna teploty. Za 3) v zadání máme jasně danou počáteční podmínky a to, že v čase $t = 0$ je $\Phi(0) = 100$, poté tam máme i druhou podmínku u které za chvílí zjistíme proč ji potřebujeme. Fyzikální zákon, který přibližně popisuje vztah pro změnu veličiny se nazývá Newtonův teplotní zákon a říká "teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teplot tělesa a okolí". Náš úkol je tedy jednoduchý a to zapsat tuto větu jako diferenciální rovnici, konkrétně.

   $$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = k\left(\Phi(T) - 20\right),$$

   kde k je konstanta úměrnosti, kterou neznáme ale nyní přijde vhod druhá podmínka "a všimli jste si, že za 20 minut se těleso zchladilo na 60°", kterou nám říká zadání. Vidíme, že toto je diferenciální rovnice typu $y' = ay + b$, tedy lineární a v tomto případě i separovatelná, protože a, b jsou pouze konstanty.

2. **Míchání látek**

Ukázkové příklady: dva příklady v přednášce, příklad z 11 cvičení. Nový příklad:

(Demidovich př. 2909)

Dno sudu s kapacitou 300 litrů je pokryto solí a nějakou nerozpustitelnou látkou. Předpokládejme, že rychlost, kterou se sůl rozpouští je přímo úměrná rozdílu koncentrace v daném čase a koncentrací saturovaného roztoku (1 kg soli na 3 litry vody) a také že dané množství vody rozpustí $\frac{1}{3}$ kg soli za minutu. Najděte množství soli v roztoku po uběhnutí jedné hodiny.

3. **Radioaktivní rozpad**

   Z tabulek zjistíte, že radium má poločas rozpadu 1600 let, kolik procent radia se rozpadne za 100 let?

   Nápověda: Radioaktivní rozpad je základním typem příkladů a to z následujících důvodů. 1) veličina, která nás zajímá je počet nerozpadlých jader v závislosti na čase. Vzorec pro změnu tohoto počtu je velmi jednoduchý, čím více je nerozpadlých jader tím více se jich rozpadne. Tedy rychlost rozpadu je úměrná počtu jader, samozřejmě nepřímo úměrná. Označíme-li velikost počtu nerozpadlých jader jako $Q(t)$, diferenciální rovnice je tedy

   $$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -rQ(t),$$

   kde $r > 0$ je konstanta úměrnosti. Poločas rozpadu slouží ke zjištěni této konstanty úměrnosti, naopak počáteční podmínka se u úloh většinou nezadává a místo ní předpokládáme, že na začátku byl počet jader, řekněme $Q(t = 0) = Q_0$.

4. **Růst**

   Kteréhosi dne v lese narazilo a černých mravenců na b rezavých mravenců, svých nejzavilejších nepřátel, přičemž je $a > b$. Pochopitelně vzplane nelítostná řež. Každý mravenec (obou druhů) ničí svoje nepřátele rychlostí α za jednotku času. Oba druhy mravenců se navzájem bezhlavě ničí plnou silou, dokud nebude jedna strana zcela vyhubena. Je jasné, že tento nepříjemný osud potká rezavé mravence, protože je jich méně. Otázky pro Vás:

   (a) Jak dlouho bude bitva trvat (tedy od počátku až do zničení posledního rezavého mravence)?

   (b) Kolik černých mravenců bitvu přežije?

3.2 Složitější fyzikálnější příklady

Toto jsou příklady, kde vzorec pro změnu veličiny není zřejmý se zadaní a musíme ji nějak odvodit. Například použitím Newtonova druhého zákona a nebo zkoumáním infinitesimálních změn systému. Ukázkový příklad jsme již, měli a to děravý válec v 11 cvičení.

1. Částice v magnetickém poli.

   Proton je umístěn v počátku soustavy souřadnic je v čase $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, 0)$, v tomto okamžiku zapneme magnetické pole o intenzitě $\vec{B} = (0, 0, B)$, jak se bude částice pohybovat? **Vyřešeno v doplňujícím videu k minulému (12) cvičení.**

2. Jednoduchý model interakce částic.

   Aproximujeme interakci částic jako dva hmotné body spojené pružinkou s tuhostí g, čím blíže jsou částice k sobě tím více se odpuzují, naopak čím jsou dále tím více se přitahují. Jak se bude tato soustava pohybovat? Vyřešte diferenciální rovnice a poté, použijte počáteční podmínky, prvně předpokládáme, že jsou obě částice na začátku v klidu a za druhé máme počáteční podmínku, že jednu částici postrčíme k druhé rychlostí v_0. Jak se úloha změní když provedeme následující úpravu: částici postrčíme silou, kolmou ke spojnici částic.

(*) má být $\frac{1}{2}$ ne 12

3. Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0, Vaše hmotnosti s padákem je m. K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti (*) $12CS\rho v^2$, kde C je asi $1,2$, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočtěte rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistěte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \to \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.

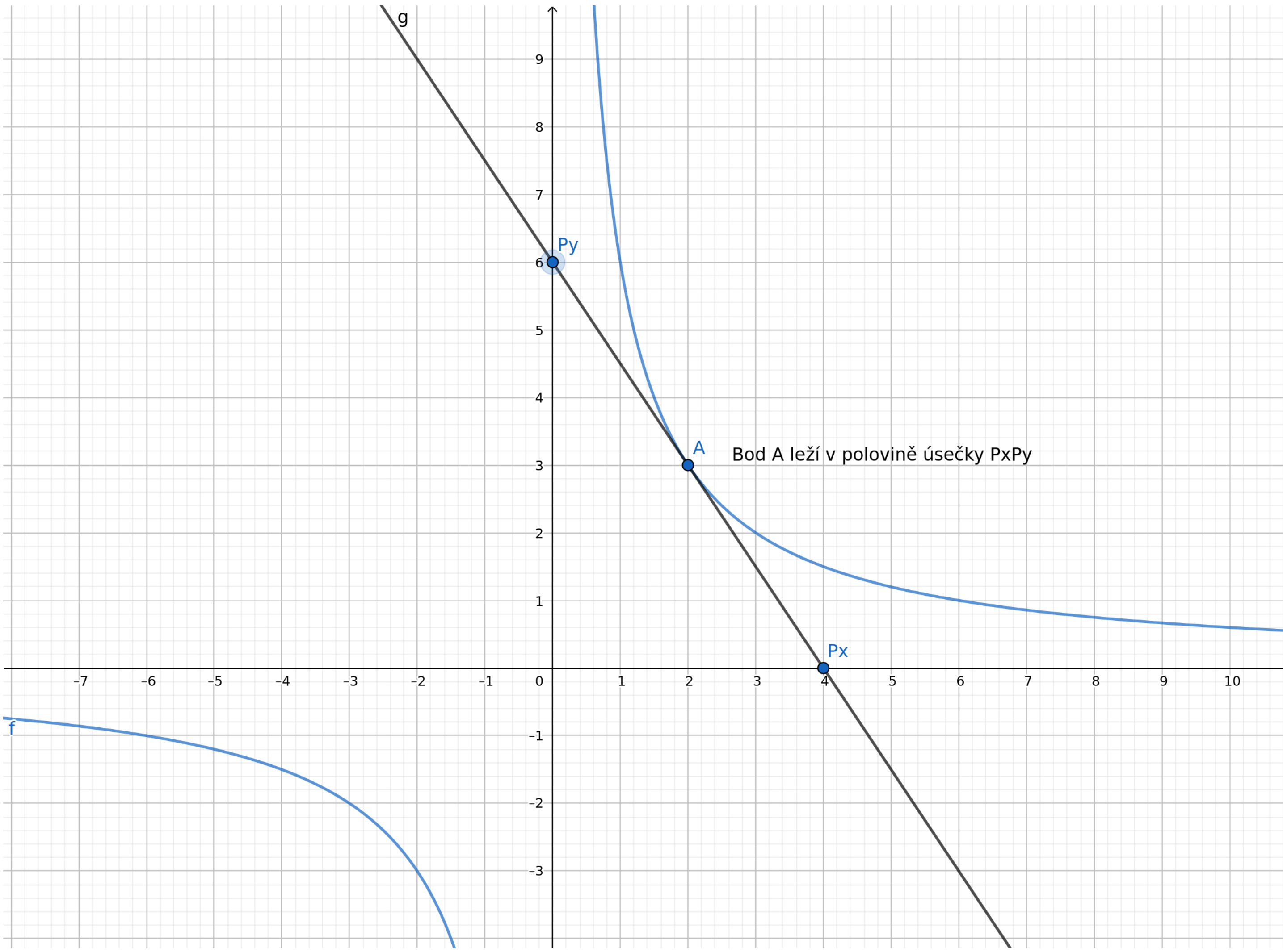
4. Hmotné těleso s nulovou počáteční rychlostí se valí po nakloněné rovině. Najděte rovnici pro jeho pohyb, když úhel nakloněné rovnice je α a koeficient tření je μ. Rovnici vyřešte.

5. Těleso o váze 4kg, je zavěšeno na pružince, svojí tíhou prodloužilo délku pružinky o $1cm$. Najděte rovnici pro pohyb tělesa, je-li horní vrchol pružinky nucen silou vykonávat harmonický pohyb $y = 2\sin 30t$, předpokládejte, že v čase $t = 0$ bylo těleso v klidu.

3.3 Geometrické slovní úlohy

Dále, lze také namyslet velkou spoustu slovních úloh pro vlastnosti křivek (tečny, normály vzorce pro křivost). Spousta takovýchto příkladu je v Demidovichovi.

1. Najděte křivku, procházející bodem $(3, 2)$, pro nichž každý segment tečny uzavřený osami x, y je rozdělen přesně na polovinu bodem dotyku s křivkou. Viz. Demidovich strana 329 příklad 3.



Obrázek 1: Krivka k uloze 1

Zkouška z M1100F / skupina B   xx. xx. 20xx

Jméno a příjmení	
UČO	
Počet listů přílohy	

Příklad	1	2	3	4	5	6	7	8	T	$\sum$
Body										

▶ `Příklad 1 [6 b.]`: Určete definiční obor funkce f a paritu funkce g, jestliže

$$f(x) = \frac{\arcsin \frac{1-2x}{4}}{7^{x+1} - 3 \cdot 7^x - 28}, \qquad g(x) = \frac{|\sin x| \arcsin x^3}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

▶ `Příklad 2 [5 b.]`: Rozhodněte a zdůvodněte, zda je funkce f spojitá v $x = 0$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3, & x \geq 0, \\ \frac{2x + \sin x}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

▶ `Příklad 3 [6 b.]`: Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Pokud ano, dokažte ho. Pokud ne, udejte protipříklad.
"Nechť f, g jsou reálné konvexní funkce a nechť existují jejich derivace do řádu dva včetně. Jestliže platí $(f' \circ g)(x) > 0$ a $(f'' \circ g)(x) > 0$, potom je složená funkce $f(g(x))$ konvexní."

▶ `Příklad 4 [6 b.]`: Udejte příklad funkce, pro níž platí

$$\int_{\overline{1}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{1}^{\underline{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5.$$

▶ `Příklad 5 [7 b.]`: Prostudujte monotonii a najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

▶ `Příklad 6 [7 b.]`: Pomocí vhodné substituce vypočítejte integrál

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

▶ `Příklad 7 [8 b.]`: Určete objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x podgrafu funkce

$$f(x) = 1 + \frac{\sin 3x}{2}, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right].$$

▶ `Příklad 8 [10 b.]`: Polévka má po ohřátí teplotu $90°C$. Po deseti minutách v místnosti o teplotě $20°C$ se ochladí na $80°C$. Jakou bude mít teplotu, pokud ji v této místnosti necháme dalších 50 minut? Při výpočtu použijte odhady

$$\ln \frac{6}{7} \doteq -0.15, \qquad \mathrm{e}^{-0.9} \doteq 0.4.$$

▷ Do první tabulky vyplňte čitelně identifikační údaje a počet listů, které k zadání přikládáte.
▷ Druhou tabulku ponechejte prázdnou.
▷ U výpočtů příkladů řádně označujte, ke kterému příkladu (a jeho části) patří.
▷ Všechny papíry s výpočty podepište a odevzdejte společně se zadáním.
▷ Není povoleno použití kalkulačky ani žádných materiálů (tabulky, vzorce, skripta, poznámky,. . .). Jakýkoli pokus o podvádění bude mít za následek hodnocení F.