

Cvčení 4-limity funkcí

M1100F
Podzim 2021

Zkuste spočítat z každého řádku jeden příklad. Pozor u třetího příkladu prvního řádku máte spočítat obě možnosti je $x \rightarrow \infty$ a $x \rightarrow -\infty$, každou zvlášť.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{2x+3}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + x^4 + 1}{3 \cdot 2^x + x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} \quad (4)$$

Dále budeme využívat těchto vzorců:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a, \quad x = e^{\ln x}$$

Jak byste se přesvědčili o správnosti těchto vzorců?

Další příklady:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) + \tan^2 x}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{\cos x - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\cos x + x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x] \quad (9)$$

Těžší příklady

Spočtěte limity posloupností:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n! e^n}$$

Nápověda: použijte Stirlingův vzorec. Spočtěte limity funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + a_1x + b_1} - \sqrt{x^2 + a_2x + b_2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

1 Výsledky

(1.1)=8, (1.2)=4, (1.3)= $\frac{1}{3}$ pro plus nekonečno a ∞ pro mínus nekonečno, (1.4)=1

(2.1)=4, (2.2)=0, (2.3)=- $\frac{2}{9}$ (2.4) neexistuje, protože pro $x \rightarrow 2^-$ vyjde $-\infty$ a pro $x \rightarrow 2^+$ vyjde $+\infty$.

(3.1)= $3x^2$, (3.2)= $\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, (3.3)= $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

(4.1)= $\frac{3}{2}$, (4.2)= $\frac{1}{2}$, (4.3)=1, (4.4)=3

(5.1)=1, (5.2)=2, (5.3)=k, (5.4)=- ∞ , (5.5)=0

(6.1)= $\frac{1}{2}$, (6.2)=3, (6.3)=1, (6.4)= $\frac{1}{2}$

(7.1)= $\cos a$, (7.2)=8, (7.3)=1, (7.4)=0, (7.5)= ∞

(8.1)=2, (8.2)=0, (8.3)=1 (pozor pro ti co si to fotilo toto jsem měl spatně jako nulu, ale je to jedna), (8.4)= e^{-2}

(9.1)=a, (9.2)= $\frac{1}{a}$, (9.3) neexistuje limita z prava se rovná ∞ a limita zleva 0, (9.4)=1, (9.5)=1

Těžší příklady vyjdou: 0,0, $\frac{a_1-a_2}{2}$, 0, 1, $\frac{m-n}{2}$, $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, 1, $-\frac{1}{2}$